

Name	Vorname	Studiengang
------	---------	-------------

Analysis 2

1. Seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf der Menge M mit $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ ($x, y \in M$).
Beweisen Sie:

$$(M, d_2) \text{ kompakt} \implies (M, d_1) \text{ kompakt.}$$

2. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := e^{x_2^2} \sin(x_1 x_2 + x_4) + x_3^5 x_4^2.$$

Bestimmen Sie $\partial^\alpha f$ für

$$(a) \quad \alpha = (2, 1, 0, 0); \quad (b) \quad \alpha = (0, 0, 0, 2); \quad (c) \quad \alpha = (1, 1, 1, 1).$$

3. Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + e^{xyz} \\ x^2 + y^2 + y \\ \sin z \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob es Umgebungen U von $(1, 0, 0)$ und V von $f(1, 0, 0)$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ bijektiv ist.

4. Unter allen vierdimensionalen Quadern mit Kantenlängen $a, b, c, d \geq 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ soll derjenige mit dem größten Volumen ermittelt werden.

- (a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$V: \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ V(a, b, c, d) := abcd$$

besitzt ein Maximum, das an einer Stelle (a_0, b_0, c_0, d_0) mit $a_0, b_0, c_0, d_0 > 0$ angenommen wird.

- (b) Bestimmen Sie die Maximumstelle.

(Hinweis: Der Teil (b) kann rechnerisch gelöst werden, ohne dass (a) behandelt worden ist.)

5. Gegeben sei das Paraboloidstück $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Begründen Sie die Jordan-Messbarkeit der Menge B und berechnen Sie den Schwerpunkt von B .