28. Sei K ein angeordneter Körper.

$a \in K \quad n, m \in \mathbb{Z}$

a) z.Z. $\quad n > 0 \wedge a > 0 \Rightarrow na > 0$

IA: $n = 1$

$$1a = \sum_{j=1}^{1} a = a > 0 \qquad (\text{aus } a > 0)$$

IS: $na > 0$ (IV)

$$\sum_{j=1}^{n+1} a = \sum_{j=1}^{n} a + a = na + a$$

Somit: $na > 0 \Rightarrow na + a > a \underset{(\text{Kürzungsregel})}{\Rightarrow} na + a > a > 0 \underset{\text{Transitiv}}{\Rightarrow} na + a > 0$

nach vollst. Induktion folgt $a \neq 0, n \neq 0 = na > 0$

$\square$

b) Bemerkung: $\quad a < 0 \Rightarrow a \neq 0 \quad (\text{denn } (a < 0 \wedge a = 0) \lightning)$
$\quad a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \quad (\text{denn } (a > 0 \wedge a = 0) \lightning)$

Für $n > 0, a > 0 \Rightarrow na > 0 \Rightarrow na \neq 0$ (nach (a)) $\quad (1)$

$\boxed{\text{Für negative } n \text{ gilt } (-n)a := n(-a)}$

für $\underset{(n = -|n|;\ a = -|a|)}{n < 0,\ a < 0}$: $(-|n|)(-|a|) = |n|(-(-|a|)) \overset{(\text{Übung} > 0;)}{=} |n||a| > 0 \Rightarrow na \neq 0$ nach (a) $\quad (2)$

für $n < 0, \underset{(a = |a|)}{a > 0}$ oder $n > 0, \underset{(a = -|a|)}{a < 0}$:

IA: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (-|a|) = (-|a|) < 0 \qquad \text{denn 0 hat kein inverses und } a > 0$$

IS: $n(-|a|) < 0$ (IV)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-|a|) = \sum_{k=1}^{n} (-|a|) + (-|a|) = n(-|a|) + (-|a|)$$

$\underset{(\text{IV})}{n(-|a|) < 0} \overset{\text{Kürzungs-Regel})}{\Rightarrow} n(-|a|) + (-|a|) < 0 + (-|a|) \Rightarrow n(-|a|) + (-|a|) < (-|a|)$

$\Rightarrow n(-|a|) + (-|a|) < (-|a|) < 0 \Rightarrow n(-|a|) + (-|a|) < 0 \quad (\text{Transitivität})$

durch vollst. Ind. folgt $n(-a) < 0$ (3)

$\hookrightarrow$ Nach (1) (2) (3) gilt also $a \neq 0, n \neq 0 \Rightarrow na \neq 0$

$\square$

Sei hier $n \in \mathbb{N}$

für na folgere ich aufgrund der Definition des Vielfachen: $\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n\text{-mal}}$ (aus Vorlesung!!!)

das für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$na + ma = \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{j=1}^{m} a = \underbrace{(a + \dots + a)}_{n\text{-mal}} + \underbrace{(a + \dots + a)}_{m\text{-mal}} = \sum_{k}^{n+m} a \quad (H1)$$

und für $-1 \in K$

$$n((-1) \cdot a) = \sum_{k=1}^{n} (-1) \cdot a = \underbrace{((-1) \cdot a + (-1) \cdot (a) + \dots + (-1) \cdot a)}_{n\text{-mal}} \overset{\text{dist. + in } K}{=} (-1) \cdot \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n\text{-mal}}$$

$$= (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} a = (-1) \cdot na \quad (H2)$$

gilt!

---

c) ZZ: $a \cdot (na) = na^2$

für $n=0$: $a \cdot (0a) = a \cdot 0 = 0 = 0(a \cdot a) = 0(a^2)$

für $n > 0$:

IA: $n=1$

$a \cdot (1a) = a \cdot \left(\sum_k^1 a\right) = a \cdot a = \prod_1^2 a = a^2 = 1 \cdot a^2$

IS: $a \cdot (na) = na^2$ (IV)

$a \cdot ((n+1)a) = a \cdot \left(\sum_k^{n+1} a\right) = a \cdot \left(\sum_k^n a + a\right)$

$= a \cdot \sum_k^n a + a \cdot a = a(na) + a \cdot a \underset{(IV)}{=} na^2 + \prod^2 a = na^2 + a^2$

$= \sum_k^n a^2 + a^2 = \sum_k^{n+1} a^2 = (n+1)a^2$

gilt durch vollst. Induktion

für $n < 0$:

wir verwenden: $(-n)a := n(-a)$ somit:

$\begin{pmatrix} n = -|n| \\ da\ n<0 \end{pmatrix}$ $a \cdot ((-|n|)a) = a \cdot (|n|(-a)) = a \cdot (|n|((-1) \cdot a)) \overset{(H1)}{=} a \cdot (-1) \cdot (|n|a) =$

$(-1) \cdot a \cdot (|n|a) \underset{(|n|>0)}{=} (-1)(|n|a^2) \underset{(H2)}{=} (|n|((-1) \cdot a^2)) = (|n|(-a^2)) = (-|n|)a^2$

$\underset{(n=-|n|)}{=} na^2$

↳ somit gilt es auch für $n<0$

für $n=0$

$a \cdot (0a) = a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a^2$

$\square$

d) ZZ: $(na) \cdot (ma) = (nm)a^2$

für $n,m = 0$

$(0a) \cdot (0a) = 0$

$(00)a^2 = 0a^2 = 0$

Für beliebiges $m>0$, $n>0$:

IA: $n=1$

$$(1a)\cdot(ma) = a\cdot(ma) = ma^2 = (1m)a^2$$

IS: $(na)\cdot(ma) = (nm)a^2$ (IV)

$$((n+1)a)\cdot(ma) = \left(\sum_k^{n+1} a\right)\cdot(ma) = \left(\sum_k^{n} a + a\right)\cdot(ma)$$

$$= (na+a)\cdot(ma) = (ma)\cdot(na+a) \overset{}{\underset{(\text{distr. } \cdot +)}{=}} ((ma)\cdot(na) + (ma)\cdot a)$$

$$= ((na)\cdot(ma) + a\cdot(ma)) \underset{(IV,(c))}{=} ((nm)a^2 + ma^2) =$$

$$= \sum_k^{nm} a^2 + \sum_j^{m} a^2 \underset{(H1)}{=} \sum_k^{nm+m} a^2 \underset{(*)}{=} \sum_k^{(n+1)m} a^2 = ((n+1)m)a^2$$

$$(*)\quad nm+m = \sum_k^{n} m + m = \sum_k^{n+1} m = (n+1)m$$

Durch vollständige Induktion folgt $(na)\cdot(ma) = (nm)a^2$ für $n>0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{für } n<0 \text{ oder } m<0 \text{ gilt auch} \\ \qquad (ma)\cdot(na) \overset{\text{kommutativ}}{=} (na)\cdot(ma) \\ \qquad \text{damit können } m, n \text{ vertauscht werden } (*1)\end{array}}$$

für: $n<0$, $m>0$

$$(-|n|a)\cdot(ma) = (|n|(-a))\cdot(ma) \overset{(H2)}{=} (-1)\cdot(\underbrace{|n|\cdot a}_{>0})\cdot(ma)$$

$$= (-1)\cdot(|n|m)a^2 = (|n|m)((-1)\cdot a^2) \overset{(H2)}{=} (|n|m)(-a^2) = (-|n|m)a^2 = (nm)a^2$$

↳ gleiches gilt für $m<0$, $n>0$ da $(*)$

für: $n<0$ und $m<0$

$(n=-|n|,\ m=-|m|)$

$$(-|n|a)\cdot(-|m|a) \overset{(\text{Definition Vielfaches, distr. } \cdot +)}{=} (|n|(-a))\cdot(|m|(-a)) = (|n|((-1)\cdot a))\cdot(|m|((-1)\cdot a))$$

$$\overset{(H2)}{=} (-1)\cdot(|n|a)\cdot(-1)\cdot(|m|a)$$

$= \underline{(-1)\cdot(-1)}\cdot(|n|a)\cdot(|m|a) = (|n|a)\cdot(|m|a) = (|n||m|)a^2$

$= (|n||m|)\left((-1)\cdot(-1)\cdot a^2\right) = \left(\left((-1)\cdot|n|\right)\left((-1)|m|\right)\, a^2\right)$

$= (-|n|-|m|)a^2 = (nm)a^2$

$\hookrightarrow$ Es folgt: $(na)\cdot(ma) = (nm)\,a^2$

$\square$