

# Differentialgeometrie (Vorlesungsnotizen)

Vadim Alekseev

6. April 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Tangentialraum zu <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
1.1	Tangentialvektoren als Richtungsableitungen . . . . .	5
1.2	Differential einer glatten Abbildung . . . . .	9
1.3	Satz über konstanten Rang . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und ihre Tangentialräume</b>	<b>15</b>
2.1	Topologische Räume . . . . .	15
2.2	Glatte Mannigfaltigkeiten . . . . .	17
2.3	Glatte Abbildungen . . . . .	18
2.4	Tangentialräume und Tangentialbündel . . . . .	19
2.4.1	Differential einer Abbildung . . . . .	20
2.4.2	Tangentialbündel . . . . .	22
2.5	Vektorbündel . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Untermannigfaltigkeiten</b>	<b>27</b>
3.1	Satz vom konstanten Rang . . . . .	27
3.2	Satz vom regulären Wert . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Vektorfelder und ihre Flüsse</b>	<b>31</b>
4.1	Vektorfelder und ihre ersten Eigenschaften . . . . .	31
4.2	Flüsse von Vektorfeldern . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Lie-Gruppen</b>	<b>38</b>
5.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	38
5.2	Wirkungen von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	40
5.3	Lie-Algebren . . . . .	45
5.4	Vektorfelder als Lie-Algebra der Diffeomorphismengruppe . . . . .	49
5.5	Integralmannigfaltigkeiten und der Satz von Frobenius . . . . .	55

6	Lineare Algebra: Tensorprodukte und äußere Potenzen	59
7	Differentialformen	60

# Einleitung

# 1 Tangentialraum zu $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Tangentialvektoren als Richtungsableitungen

Die naive Vorstellung von Tangentialvektoren an  $\mathbb{R}^n$  ist: ein Tangentialvektor an einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  ist ein Paar  $(p, \xi)$ , wobei  $\xi \in \mathbb{R}^n$  die Koordinaten des Tangentialvektors ist. Das Problem mit dieser Definition ist, dass sie nicht koordinatenfrei ist: wenn wir das Koordinatensystem in  $\mathbb{R}^n$  wechseln, verändern sich die Zahlen, die unseren Tangentialvektor beschreiben, aber nicht der geometrische Sinn dieses Vektors.

Die koordinatenfreie Definition eines Tangentialvektors basiert darauf, dass die geometrische Richtung des Vektors dadurch beschrieben werden kann, wie sich glatte Funktionen in diese Richtung verändern, das heißt, wie man sie in die gewählte Richtung ableitet. Man identifiziert also den Tangentialvektor mit der Richtungsableitung

$$\begin{aligned}\partial_{(p,\xi)}\varphi &:= D_p\varphi(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(p) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (\varphi)\end{aligned}$$

**Definition 1.1.** Sei  $p \in \mathbb{R}^n$ . Eine Derivation an  $p$  ist eine lineare Abbildung  $\partial: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Leibniz-Regel an  $p$

$$\partial(\varphi \cdot \psi) = \varphi(p) \cdot \partial\psi + \partial\varphi \cdot \psi(p), \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

erfüllt.

Die oben eingeführten Richtungsableitungen  $\partial_{(p,\xi)}$  sind Beispiele von Derivationen an  $p$ ; wir werden gleich zeigen, dass es die einzigen sind.

**Proposition 1.2.** Jede Derivation  $\partial: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  an  $p \in \mathbb{R}^n$  ist von der Form  $\partial_{(p,\xi)}$  für ein eindeutig bestimmtes  $\xi \in \mathbb{R}^n$

*Beweis.* Seien  $x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$  die kanonischen Koordinatenabbildungen.

Setze  $\xi_i := \partial(x^i) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir zeigen nun:  $\partial = \partial_{(p,\xi)}$ .

Der entscheidende Trick ist folgende Behauptung: jedes  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  kann man darstellen als

$$\varphi(x) = \varphi(p) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)(x^i - p^i) \quad \text{fast Taylor}$$

für passende  $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Beweis des Tricks:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(p) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi(p + t(x-p))}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) \cdot (x^i - p^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) dt}_{=: \varphi_i(x)}. \end{aligned}$$

Nun haben wir außerdem

$$\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = \partial(1) + \partial(1) \Rightarrow \partial(1) = 0,$$

also folgt

$$\begin{aligned} \partial(\varphi) &= \partial \left( \varphi(p) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot (x^i - p^i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{\partial(\varphi_i)(p^i - p^i)}_{=0} + \underbrace{\varphi_i(p)}_{\xi_i} \underbrace{\partial(x^i - p^i)}_{\text{konstant}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(p) \xi_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p). \end{aligned}$$

Eindeutigkeit folgt aus der Linearität der Derivation:

$$\partial_{(p,\xi)} = \partial_{(p,\eta)} \implies \partial_{(p,\xi-\eta)} = 0 \implies \partial_{(p,\xi-\eta)}(x^i) = \xi^i - \eta^i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Dies motiviert folgende Definition

**Definition 1.3.** Der Tangentialraum zu  $\mathbb{R}^n$  an  $p \in \mathbb{R}^n$  ist der Vektorraum der Derivationen an  $p$ :

$$T_p\mathbb{R}^n := \{\partial: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation an } p\}.$$

Die obige Proposition sagt dann:

**Proposition 1.4.** Der Tangentialraum zu  $\mathbb{R}^n$  an  $p \in \mathbb{R}^n$  ist isomorph zu  $\mathbb{R}^n$  durch die Abbildung

$$T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, \quad \partial_{(p,\xi)} \leftrightarrow \xi$$

Es stellt sich folgende natürliche Frage: sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $p \in U$ . Was ist der Tangentialraum zu  $U$  an  $p$ ? Genauer, wie kann man

$$T_pU := \{\partial: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation an } p\}$$

beschreiben?

*Übung 1.5.* Beweisen Sie, dass Proposition 1.4 auch für *konvexe* offene Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt.

Offensichtlich induziert die Einschränkungabbildung  $i^*: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(U)$  eine Abbildung  $i_*: T_pU \rightarrow T_pM$ ,  $\delta \mapsto \delta \circ i^*$ .

**Proposition 1.6.** Die Abbildung  $i_*: T_pU \rightarrow T_pM$  ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Offensichtlich liegen alle  $\partial_{(p,\xi)}$ 's in  $T_pU$ , also ist nach obiger Proposition die Abbildung  $i_*$  surjektiv.

Um zu zeigen, dass sie injektiv ist, benutzen wir die Technik der Abschneidefunktionen.

Wir definieren die Hügelfunktion

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

und die Hangfunktionen

$$\begin{aligned} \varrho(x) &:= \frac{\int_{-\infty}^x \chi(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt}, \\ \theta(x) &:= 1 - (1 - \varrho)^2 = 2\varrho - \varrho^2. \end{aligned}$$

Beachte, dass  $\sqrt{1 - \theta} = 1 - \varrho$  eine glatte Funktion ist.

Da  $U$  offen ist, gibt's ein  $r > 0$  mit  $B(p, 5 \cdot r) \subseteq U$ . Sei

$$\vartheta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \begin{cases} \theta\left(3 - \frac{|x-p|}{r}\right), & x \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} 0 - \partial(\vartheta) &= \partial(1) - \partial(\vartheta) \\ &= \partial(1 - \vartheta) \\ &= \partial(\sqrt{1 - \vartheta^2}) \\ &= 2\sqrt{1 - \vartheta(p)} \underbrace{\partial(\sqrt{1 - \vartheta})}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wenn nun  $f \in C^\infty(U)$  eine beliebige glatte Funktion ist, gilt  $\vartheta \cdot f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$i_* \partial(\vartheta \cdot f) = \partial(\vartheta \cdot f) = \partial(\vartheta) \cdot f(p) + \theta(p) \cdot \partial(f) = \partial(f).$$

Somit ist  $i_*$  injektiv, wie gewünscht

□

Fazit: „Tangentenraum ist lokal, er sieht nicht, was weit entfernt ist“.



## 1.2 Differential einer glatten Abbildung

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f: U \rightarrow V$  glatt.

**Definition 1.7.** Die Pullback-Abbildung zu  $f$  ist

$$f^*: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U) : \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Die Pullback-Abbildung kann man durch folgendes kommutierendes Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ f \uparrow & \nearrow f^*(\varphi) = \varphi \circ f & \\ U & & \end{array}$$

Die Abbildung  $f^*$  ist Algebrenhomomorphismus: sie ist linear und respektiert Produkte.

**Definition 1.8.** Seien nun  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $f: U \rightarrow V$  glatt. Sei  $p \in U$ . Das Differential von  $f$  an  $p$  ist die Abbildung

$$D_p f: \begin{cases} T_p U & \rightarrow T_{f(p)} V \\ \partial & \mapsto \partial \circ f^* \end{cases}$$

das heißt:

$$[(D_p f)(\partial)](\varphi) = \partial(\varphi \circ f) = \partial(f^* \varphi)$$

Das Differential bildet Derivationen auf Derivationen ab. Zeige die Wohldefiniertheit:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(V) & \xrightarrow{f^*} & C^\infty(U) \\ & \searrow (D_p f)(\partial) & \searrow \partial \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$(D_p f)(\partial)$  ist linear, da Komposition linearer Abbildung. Die Leibniz-Regel ist auch er-

füllt:

$$\begin{aligned}
[(D_p f)(\partial)](\varphi \cdot \psi) &= \partial(f^*(\varphi \cdot \psi)) \\
&= \partial((\varphi \cdot \psi) \circ f) \\
&= \partial((\varphi \circ f) \cdot (\psi \circ f)) \\
&= \partial((f^* \varphi) \cdot (f^* \psi)) \\
&= (f^* \varphi)(p) \cdot \partial(f^* \psi) + (f^* \psi)(p) \cdot \partial(f^* \varphi) \\
&= \varphi(f(p)) \cdot [(D_p f)(\partial)](\psi) + \psi(f(p)) \cdot [(D_p f)(\partial)](\varphi)
\end{aligned}$$

Vergleiche mit Definition aus Analysis:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f' = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}} & \mathbb{R}^m \\
\cong \downarrow & & \uparrow \cong \\
T_p \mathbb{R}^n & & T_{f(p)} \mathbb{R}^m \\
\cong \downarrow & & \uparrow \cong \\
T_p U & \xrightarrow{D_p f} & T_{f(p)} V
\end{array}$$

Es gilt für  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  glatt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \left( (D_p f) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right] \right) [\varphi] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (f^* \varphi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (\varphi \circ f) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (\varphi \circ f)_1 \\
&= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \Big|_{f(p)} \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \Big|_{f(p)} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \Big|_p \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \Big|_p \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \\
&= \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \right) [\varphi]
\end{aligned}$$

Das Differential aus der Analysis (die Matrix der partiellen Ableitungen) ist somit der Koordinatenausdruck von unserem Differential (Abbildung zwischen Vektorräumen von Derivationen):

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p}_{\text{Koordinate} \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)}}_{\text{Element aus Basis}}$$

Die übliche Kettenregel für Differentiale folgt so:

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$D_p(g \circ f) = D_{f(p)}g \circ D_p f$$

Beweis:

$$\begin{aligned} ((D_{f(p)}g \circ D_p f)(\partial))[\varphi] &= ((D_{f(p)}g)[(D_p f)(\partial)](\varphi) \\ &= [(D_p f)(\partial)](\varphi \circ g) \\ &= \partial((\varphi \circ g) \circ f) \\ &= \partial(\varphi \circ (g \circ f)) \\ &= [(D_p(g \circ f))(\partial)](\varphi) \end{aligned}$$

Einen Tangentialvektor kann man nun auch als Geschwindigkeitsvektor einer Kurve interpretieren.

Sei  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Kurve,  $I$  ein Intervall,  $p = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

Wir definieren

$$\dot{\gamma}(t_0) := (D_{t_0}\gamma) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

wobei  $\partial/\partial t$  der kanonische Tangentialvektor an  $\mathbb{R}$  ist.

*Übung 1.9.* Es gilt:

$$\{\dot{\gamma}(t_0) \mid \gamma: I \subseteq \mathbb{R} \text{ glatte Kurve mit } \gamma(t_0) = p\} = T_p \mathbb{R}^n$$

### 1.3 Satz über konstanten Rang

Wir erinnern uns an den Satz über Existenz von lokalen Inversen zu glatten Funktionen:

**Definition 1.10.** Eine glatte bijektive Abbildung  $f: U \rightarrow V$  mit glatter Inversen heißt Diffeomorphismus.

**Satz 1.11.** Sei  $f: U \rightarrow V$  glatt,  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  so dass:

$$D_p f: T_p U \rightarrow T_p V$$

invertierbar ist. Dann ist  $f$  lokal ein Diffeomorphismus: es gibt offene Teilmengen  $U' \subseteq U, V' \subseteq V$  mit  $p \in U'$ , so dass

$$f|_{U'}: U' \xrightarrow{\cong} V'$$

ein Diffeomorphismus ist.

Wir wollen jetzt eine Abbildung  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$  durch ihr Differential

$$D_p f: \underbrace{T_p U}_{\cong \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{T_p V}_{\cong \mathbb{R}^m} \text{ linear}$$

untersuchen.

↪ Was ist „bestmögliche“ Bedingung an  $D_p f$ , die schönes über  $f$  impliziert?

Die „richtige“ Bedingung an  $D_p f$  ist, konstanten Rang zu haben.

**Satz 1.12** (Satz über konstanten Rang). Sei  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $U, V$  offen,  $0 \in U$ ,  $f(0) = 0 \in V$ .

Wenn  $\text{rg } D_x f$  konstant gleich  $r$  für  $x$  in einer Umgebung  $U$  von  $0$  ist, dann existieren Umgebungen  $V' \subseteq V$  und  $V''$ ,  $U' \subseteq U$ ,  $U''$  von Null in  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  und Diffeomorphismen  $g: V' \rightarrow V''$ ,  $h: U' \rightarrow U''$  mit  $g \circ f \circ h(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$  dort, wo die Verknüpfung definiert ist.

Seien:  $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n \leq m$  die Einbettung in die  $n$  ersten Koordinaten und  $\pi: \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$  die Projektion auf die  $m$  letzten Koordinaten.

**Korollar 1.13.** Sei  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $U, V$  offen,  $0 \in U$ ,  $f(0) = 0 \in V$ .

- (i) Wenn  $n \leq m$ ,  $\text{rg } D_p f = n$ , dann existiert eine offene Umgebung  $V' \subseteq V$ ,  $0 \in V'$  und ein Diffeomorphismus  $g: V' \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V'' \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $g(0) = 0$  mit  $g \circ f = \iota$  dort, wo die Verknüpfung definiert ist. Das heißt, nach einem Koordinatewechsel  $g$  wird  $f$  zur kanonischen Einbettung  $\iota$ .
- (ii) Wenn  $n \geq m$ ,  $\text{rg}(D_p f) = m$ , dann existiert eine offene Umgebung  $U' \subseteq U$ ,  $0 \in U'$  und ein Diffeomorphismus  $h: U'' \rightarrow U'$ ,  $h(0) = 0$  mit  $f \circ h = \pi$  dort, wo  $f \circ \pi$  definiert ist.

*Beweis.* Nach eventueller Permutation von Koordinaten können wir annehmen, dass das Differential von  $f$  in einer Nullumgebung folgende Gestalt hat:

$$D_x f = \begin{bmatrix} A(x) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \det A(x) \neq 0$$

Definiere nun:

$$\begin{cases} F: U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \mapsto (\pi_r(f(x_1, \dots, x_n)), x_{r+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

wobei  $\pi_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  die kanonische Projektion ist.

$$D_0 F = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt:  $F$  ist an Null lokal invertierbar mit lokaler Inversen  $h$ . Aus der Gestalt von  $F$  folgt, dass  $h$  in den letzten  $n - r$  Koordinaten gleich der Identität ist:

$$h(x) = (\hat{h}(x), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Es folgt

$$(f \circ h)(x) = f(\hat{h}(x), x_{r+1}, \dots, x_n) = (\pi_r(F(\hat{h}(x), x_{r+1}, \dots, x_n)), \hat{g}(x)) = (x_1, \dots, x_r, \hat{g}(x))$$

für eine glatte Funktion  $\hat{g}$ .

Das Differential dieser Abbildung hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ D\hat{g} \end{bmatrix},$$

und der Rang davon kann nur dann gleich  $r$  sein, wenn  $\hat{g}$  von den letzten  $n-r$  Koordinaten unabhängig ist. Also ergibt sich, dass  $\hat{g}$  in der Tat eine Abbildung  $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$  darstellt.

Wir definieren nun

$$g(x) = x - (0, \dots, 0, \hat{g}(x_1, \dots, x_r)).$$

Dies ist offensichtlich ein lokaler Diffeomorphismus an  $0$ , da man das Inverse explizit hinschreiben kann. Nun folgt durch direktes Nachrechnen

$$g \circ f \circ h = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

□

# 2 Mannigfaltigkeiten und ihre Tangentialräume

## 2.1 Topologische Räume

Wir sammeln hier notwendige Begriffe aus der mengentheoretischen Topologie, die für Definition einer Mannigfaltigkeit notwendig sind

**Definition 2.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  ist ein Paar aus einer Menge  $X$  und einem System  $\tau$  von Teilmengen von  $X$  ( $\hat{=}$  „offene Mengen“) mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\emptyset, X \in \tau$
- (ii)  $(U_i)_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$  (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen)
- (iii)  $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$  (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen)

*Beispiel 2.2.*  $(X, d)$  metrischer Raum  $\Rightarrow \tau_d := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0: B_r(x) \subseteq U\}$  die durch  $d$  induzierte Topologie

*Beispiel 2.3.* Auf  $\mathbb{R}^n$  gibt's die Metriken, aus den man Topologien gewinnen kann:  $(\mathbb{R}^n, d_2(x, y) = \|x - y\|_2) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$  und  $(\mathbb{R}^n, d_1(x, y) = \|x - y\|_1) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{d_1})$

Es gilt  $\tau_{d_2} = \tau_{d_1}$ , da alle Normen äquivalent (vgl. Analysis-Vorlesung).

**Definition 2.4.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt hausdorffsch, wenn für jedes Paar von Punkten durch disjunkte offene Umgebungen getrennt werden kann:

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U_x, U_y \text{ offen: } U_x \cap U_y = \emptyset$$

**Definition 2.5.** Ein Hausdorff-Raum  $(X, \tau)$  heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq X, U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in I \text{ mit } \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \supseteq X$$

**Definition 2.6.** Sei  $(X, \tau)$  topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  von offenen Mengen heißt Basis der Topologie  $\tau$ , falls jedes  $U \in \tau$  als Vereinigung  $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ ,  $B_i \in \mathcal{B}$  dargestellt werden kann.

**Definition 2.7.** Ein topologischer Raum ist zweitabzählbar bzw. erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

*Beispiel 2.8.* Der euklidische Topologische Raum  $(\mathbb{R}^n, \tau)$  hat  $\{\underbrace{B(x, r)}_{=B_r(x)} \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$  als Basis.  $(\mathbb{R}^n, \tau)$  ist also zweitabzählbar.

**Definition 2.9.** Eine *topologische Mannigfaltigkeit* von Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum  $M$  mit der Eigenschaft, dass jedes  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  hat, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist (das heißt  $\exists x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, bijektiv,  $x^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow U$  auch stetig)

*Bemerkung 2.10.* Da  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zu  $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, könnte man  $B_1(0)$  oder eine beliebige offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  statt  $\mathbb{R}^n$  verwenden. Dies liefert eine äquivalente Definition.

**Definition 2.11.** Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit von Dimension  $n$ . Ein *differenzierbarer Atlas*  $\mathcal{A}$  auf  $M$  ist eine Familie

$$\mathcal{A} = \{(U, x) \mid U \subseteq M \text{ offen}, x: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \text{ Homöomorphismus}\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) die  $U$ 's überdecken  $M$ :  $M = \bigcup_{(U, x) \in \mathcal{A}} U$
- (ii) die Vergleichsabbildungen zwischen zwei Karten sind glatt:  $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  ist glatt.

Die Elemente von einem Atlas heißen *Karten*.

**Definition 2.12.** Zwei Atlanten  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  heißen *äquivalent / kompatibel*, wenn  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  ein Atlas ist. Das heißt:

$$\forall (U, x) \in \mathcal{A}, (V, y') \in \mathcal{A}', U \cap V \neq \emptyset : y' \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y'(U \cap V) \text{ ist glatt}$$



## 2.2 Glatte Mannigfaltigkeiten

**Definition 2.13.** Eine *glatte* (= differenzierbar) *Mannigfaltigkeit*  $M$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten (einer sogenannten „glatte Struktur“).

*Beispiel 2.14.*  $\mathbb{R}$  ist 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Atlanten

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{(\mathbb{R}, \text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})\} \\ \mathcal{A}' &:= \{(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\cdot}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})\}\end{aligned}$$

sind nicht äquivalent (Übung).

**Konvention 2.15.** Von nun an nehmen wir stets an, dass alle Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten, glatt sind.

*Beispiel 2.16.* (i)  $\mathbb{R}^n: \mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

(ii)  $M$  Mannigfaltigkeit,  $U \subseteq M$  offen  $\Rightarrow U$  ist Mannigfaltigkeit (Schneide alle Kartenumgebungen mit  $U$ )

(iii) Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\dim V = n \Rightarrow V$  ist  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Die Wahl einer Basis definiert Karte  $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , je zwei solche Karten sind kompatibel, weil die Vergleichsabbildung durch Multiplizieren mit der Basiswechsellmatrix gegeben ist)

(iv)  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $V_i^\pm = \{x \in S^n \mid \pm x_i > 0\} \subseteq S^n$  offen  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i^+ \cup V_i^-) = S^n$ ,

$$p_i: \begin{cases} V_i^\pm & \rightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{cases}$$

ist Homöomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ \mapsto & \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i \neq i} x_i^2}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \right) \end{aligned}$$

Was ist  $\pi_i \circ \pi_j^{-1}$  (wo es definiert ist)?:

$$\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \\ \mapsto \left( x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1} \pm \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \end{array}$$

(v) Die Gruppe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$$

ist eine offene Teilmenge in  $\mathbb{R}^{n^2}$  und daher eine Mannigfaltigkeit von Dimension  $n^2$ .

(vi)  $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$  Mannigfaltigkeit  $\Rightarrow (M \times N, \mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N)$  Mannigfaltigkeit

## 2.3 Glatte Abbildungen

**Definition 2.17.** Seien  $M, N$  zwei Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt *glatt*, wenn für jedes Paar von Karten  $(U, x)$  und  $(V, y)$  auf  $M$  bzw.  $N$  gilt:  $y \circ f \circ x^{-1}$  ist glatt (wo sie definiert ist):

$$\begin{array}{ccc} U \supseteq M & \xrightarrow{f} & N \subseteq V \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{y \circ f \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Das heißt eine Abbildung ist glatt, wenn sie glatt in lokalen Koordinaten ist.

Notation:

$$C^\infty(M, N) := \{f: M \rightarrow N \text{ glatt}\}, \quad C^\infty := C^\infty(M, \mathbb{R})$$

*Übung 2.18.* Verknüpfung glatter Abbildungen ist glatt:  $M \xrightarrow{f} N, N \xrightarrow{g} P$ , glatt  $\Rightarrow g \circ f$  glatt

*Übung 2.19.*  $C^\infty$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra, das heißt Summen, Vielfache glatter Abbildungen sind glatt.

**Definition 2.20.** Eine glatte Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt *Diffeomorphismus*, wenn  $\exists g: N \rightarrow M$  glatt:

$$g \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ g = \text{id}_N$$

Wenn ein Diffeomorphismus  $f: M \rightarrow N$  existiert, so heißen  $M, N$  *diffeomorph*, in Zeichen

$$M \cong N, \quad M \xrightarrow[f]{\cong} N$$

*Beispiel 2.21.* (i)  $B_1(0) \cong \mathbb{R}^n, x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) \cdot x$

(ii)  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id})\}) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\cdot})\})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f=(x \mapsto x^3)} & \mathbb{R} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \sqrt[3]{\cdot} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \end{array}$$

(iii) Zwei Atlanten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  auf  $M$  sind äquivalent, wenn

$$\text{id}: (M, \mathcal{A}_1) \rightarrow (M, \mathcal{A}_2)$$

ein Diffeomorphismus ist und Umgekehrt. (Übung)

## 2.4 Tangentialräume und Tangentialbündel

Da unsere Mannigfaltigkeiten nach Definition lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussehen und wir bereits die Theorie des Tangentialraums von  $\mathbb{R}^n$  weitgehend koordinatenfrei entwickelt haben, funktioniert sie für Mannigfaltigkeiten vollkommen analog.

**Definition 2.22.**  $f: M \rightarrow N$  glatt  $\Rightarrow f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M), \varphi \mapsto \varphi \circ f$  heißt *Pullback-*(Zurückzieh-) *Abbildung*.

Die Pullback-Abbildung ist ein Algebrenhomomorphismus.

Wir beobachten, dass

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad \text{id}^* = \text{id}, \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

Es folgt: wenn  $f$  ein Diffeomorphismus ist, so ist  $f^*$  ein Isomorphismus von Algebren.

**Definition 2.23.** Sei  $p \in M$ . Der *Tangentialraum* von  $M$  an  $p$  ist definiert als der Raum der Derivationen von  $C^\infty(M)$  an  $p$

$$T_p M := \{ \partial: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, } \partial(fg) = f(p)\partial(g) + g(p)\partial(f) \}$$

*Übung 2.24.* Sei  $(U, x)$  Karte von  $M$ ,  $p \in U \Rightarrow x(U) = \mathbb{R}^n$ ,  $x: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$  Diffeomorphismus.

Folglich gilt:

- $x^*: C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} C^\infty(U)$  ist ein Isomorphismus und
- wir haben einen Isomorphismus von Tangentialräumen  $T_p U \cong T_{x(p)} \mathbb{R}^n (\cong \mathbb{R}^n)$  gegeben durch  $\partial \mapsto \partial \circ x^*$ .

Aus dem Isomorphismus

$$T_p U \cong T_{x(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

bekommen wir eine Basis:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \in T_p M$$

Streng genommen passiert hier ein gewisser „Notationsmissbrauch“, formal sind diese Ableitungen so zu verstehen:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p (f) := \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_{x(p)} (f \circ x^{-1}).$$

**Proposition 2.25.** Die Inklusionsabbildung  $i: U \hookrightarrow M$  induziert einen Isomorphismus  $(i^*)^*: T_p U \rightarrow T_p M$ ,  $(i^*)^*(\partial) = \partial \circ i^*$ . Hierbei ist  $i^*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(U)$  die Pullbackabbildung.

*Beweis.* Der Beweis ist fast der gleiche wie in  $\mathbb{R}^n$  (Proposition 1.6); die Abschneidefunktionen konstruiert man zunächst in  $x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  und transportiert sie dann auf  $U$ .  $\square$

**Korollar 2.26.**  $\dim M = n \Rightarrow T_p M \cong \mathbb{R}^n$ ,  $p \in M$

## 2.4.1 Differential einer Abbildung

Die Definition des Differentials einer Abbildung folgt auch dem bereits behandelten Fall  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $N = \mathbb{R}^m$ .

**Definition 2.27.** Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten,  $f: M \rightarrow N$  glatt. Sei  $p \in M$ . Das *Differential* von  $f$  an  $p$  ist die lineare Abbildung.

$$D_p f = (f_*)_p : \begin{cases} T_p M & \rightarrow T_{f(p)} N \\ v & \mapsto v \circ f^* \\ (C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}) & \rightarrow (C^\infty(N) \xrightarrow{f^*} C^\infty(M) \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert:  $\nu \circ f^* \in T_{f(p)} N$ , denn:

$$\begin{aligned} (\nu \circ f^*)(\varphi \cdot \psi) &= \nu(f^*(\varphi \cdot \psi)) \\ &= \nu(f^*(\varphi) \cdot f^*(\psi)) \\ &= (f^*(\varphi))(p) \cdot \nu(f^*(\psi)) + (f^*(\psi))(p) \cdot \nu(f^*(\varphi)) \\ &= \varphi(f(p)) \cdot (\nu \circ f^*)(\psi) + \psi(f(p)) \cdot (\nu \circ f^*)(\varphi) \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $N = \mathbb{R}$  bekommt man den Begriff des Differentials einer glatten Funktion.

**Definition 2.28.** Sei  $\varphi \in C^\infty(M)$ ,  $p \in M$ . Das *Differential* von  $\varphi$  an  $p$  ist eine lineare Abbildung

$$d\varphi(p) \in (T_p M)^* =: T_p^* M$$

**Definition 2.29.** Der Dualraum des Tangentialraums

$$T_p^* M := (T_p M)^*$$

heißt *Kotangentialraum*. Wenn  $(U, x)$  eine Karte um  $p$  ist, folgt auch

$$T_p^* U \cong T_p^* M$$

*Bemerkung 2.30.* In obigen Bezeichnungen ist  $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$  die duale Basis zu  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$ , denn

$$dx_i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Big|_p = \delta_{ij}.$$

Es folgt

$$d\varphi(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_p dx_i(p),$$

weil die Koordinaten des Vektors  $d\varphi(p)$  in der Basis  $dx_1, \dots, dx_n$  genau durch Anwenden der dualen Basisvektoren  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$  entstehen.

Eine glatte Abbildung  $f$  induziert eine natürliche *Pullback-Abbildung*  $f^* := (f_*)^*: T_{f(p)}N \rightarrow T_pM$  als Dualabbildung des Differentials.

## 2.4.2 Tangentialbündel

Wir möchten von der Idee Gebrauch machen, dass Tangentialräume zu  $p \in M$  auch „glatt in  $p$  variieren“. Um es präzise auszudrücken, führen wir die natürliche Struktur einer Mannigfaltigkeit auf ihrer Vereinigung.

Sei also

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

mit Projektionsabbildung

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad v \in T_pM \Leftrightarrow \pi(v) = p$$

**Proposition 2.31.** *TM trägt eine glatte Struktur, die durch die glatte Struktur von M induziert ist; mit dieser ist TM eine Mannigfaltigkeit von Dimension 2n.*

*Beweis.* Sei  $U, x$  eine Karte von  $M$ . Definiere  $\tilde{U} := \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_pM$

$$\begin{cases} \tilde{U} & \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto \left( \underbrace{x(\pi(v))}_{\in \mathbb{R}^n}, [dx_1(\pi(v))](v), \dots, [dx_n(\pi(v))](v) \right) \end{cases}$$

Definiere eine Topologie auf  $TM$  durch Forderung, dass alle  $\tilde{x}$ 's Homöomorphismen sind; sie ist zweitabzählbar, wenn die Topologie auf  $M$  es war. Wir müssen nur überprüfen, dass

$$\{(\tilde{U}, \tilde{x}) \mid (U, x) \in \mathcal{A}\}$$

einen Atlas bilden.

Seien  $(\tilde{U}, \tilde{x}), (\tilde{V}, \tilde{y})$  zwei solche Karten so dass

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$$

Wenn  $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$(\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1})(a, b) = \underbrace{((y \circ x^{-1})(a))}_{\text{glatt}}, \underbrace{D_a(y \circ x^{-1})(b))}_{\text{glatt}},$$

also ist die Vergleichsabbildung tatsächlich glatt. □

*Bemerkung 2.32.* Analog ist  $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Diese Erkenntnis bringt jetzt ein neues Verständnis für das Differential einer Abbildung.

Sei  $f: M \rightarrow N$  glatt. Das Differential von  $f$  wird jetzt zu einer Abbildung:

$$\begin{aligned} Df &= f_*: TM \rightarrow TN, \\ v &\mapsto D_{\pi(v)}f(v) \end{aligned}$$

$f_*$  ist glatt, denn wenn  $(U, x)$  bzw.  $(V, y)$  Karten auf  $M$  bzw.  $N$  sind, so sind  $(\tilde{U}, \tilde{x}), (\tilde{V}, \tilde{y})$  Karten für  $TM, TN$ , und wir bekommen

$$\begin{aligned} (\tilde{y} \circ f_* \circ \tilde{x}^{-1}): \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}^{2m} \quad (\text{genauer: auf gewissen offenen Teilmengen}) \\ (a, b) &\mapsto ((y \circ f \circ x^{-1})(a), D_a(y \circ f \circ x^{-1})(b)), \end{aligned}$$

und somit ist die Abbildung  $f_*$  glatt.

Aus der Definition von  $Df = f_*$  folgt:

$$\pi_{TN} \circ f_* = f \circ \pi_{TM}$$

also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df=f_*} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

## 2.5 Vektorbündel

Wir haben jetzt das Tangential- und Kotangentialbündel als „glatte Familien von Vektorräumen“ über  $M$  konstruiert. Dies sind Beispiele von einer allgemeinen Situation, die wir auch noch später vernünftig benutzen werden.

**Definition 2.33.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Ein *Vektorbündel*  $E$  von Dimension  $m$  über  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit  $E$  zusammen mit einer surjektiven glatten Abbildung  $\pi: E \rightarrow M$  (Projektionsabbildung), so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) jede Faser  $E_p := \pi^{-1}(p)$ ,  $p \in M$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum von Dimension  $m$
- (ii) (lokale Trivialität) für jeden Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U$ , so dass

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow[\psi]{\cong} U \times \mathbb{R}^m$$

so dass für jedes  $g \in U$  gilt:

$$\psi(g, \cdot): E_g \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist ein Vektorraumisomorphismus

*Beispiel 2.34.* (i) Das triviale  $m$ -dimensionale Vektorbündel über  $M$  ist  $E = M \times \mathbb{R}^m$ ,  $\pi$  projiziert in die erste Komponente

(ii)  $TM$ ,  $T^*M$  Vektorbündel über  $M$  von Dimension  $\dim M$

(iii) Wenn  $E$  und  $F$  Vektorbündel über  $M$  sind, so ist,

$$E \oplus F \stackrel{\text{als Menge}}{=} E_p \oplus F_p$$

auch ein Vektorbündel (Übung: überprüfe, dass es eine Struktur der Mannigfaltigkeit trägt und lokal trivial ist)

Die Vektorbündel sind in der Differentialgeometrie so fundamental, dass man sie sogar insgesamt durch folgendes Motto beschreibt:

„Differentialgeometrie ist ein Teil der Mathematik, wo man Analysis horizontal und lineare Algebra vertikal macht“



Wenn wir ein Vektorbündel haben, können wir „glatte Funktionen mit Werten in diesem Vektorbündel“ betrachten.

**Definition 2.35.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Ein *Schnitt* von  $E$  ist eine glatte Abbildung  $s: M \rightarrow E$  mit

$$\pi \circ s = \text{id}_M$$

Der Raum der Schnitte

$$\Gamma(E) := \{s: M \rightarrow E \mid S \text{ Schnitt von } E\}$$

ist ein Vektorraum mit punktweisen Operationen:

$$(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p), \quad (\lambda s)(p) = \lambda \cdot s(p), \quad p \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es gilt sogar mehr: wenn  $E = M \times \mathbb{R}^m$ , dann ist  $\Gamma(E) = C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ . Wenn nun  $s \in \Gamma(E)$ ,  $\varphi \in C^\infty$ .

$$\Rightarrow (\varphi \cdot s)(p) := \varphi(p) \cdot s(p)$$

Das macht  $\Gamma(E)$  zu einem  $C^\infty(M)$ -Modul.

**Definition 2.36.** Seien  $E \xrightarrow{\pi_E} M$  und  $F \xrightarrow{\pi_F} M$  zwei Vektorbündel. Ein *Homomorphismus*  $f: E \rightarrow F$  ist eine glatte Abbildung mit  $\pi_F \circ f = \pi_E$  (das heißt, folgendes Diagramm kommutiert):

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

welche faserweise linear ist, das heißt,  $f|_{E_p}: E_p \rightarrow F_p$  ist linear.

Selbstverständlich resultiert hieraus auch der Begriff der Isomorphie von Vektorbündeln.

**Definition 2.37.** Zwei Vektorbündel  $E, F$  über  $M$  heißen *isomorph* ( $E \cong F$ ), wenn es Vektorbündelhomomorphismen  $f: E \rightarrow F$ ,  $g: F \rightarrow E$  gibt mit

$$g \circ f = \text{id}_E, \quad f \circ g = \text{id}_F$$

Nach Definition ist jedes Vektorbündel lokal trivial, aber global ist es eine nichttriviale Bedingung:

**Definition 2.38.** Ein Vektorbündel  $E$  heißt trivial, wenn  $E \cong M \times \mathbb{R}^n$ .

Nicht jedes Vektorbündel ist trivial, zum Beispiel ist  $TS^2$  nicht trivial („man kann einen Igel nicht kämmen“).

## 3 Untermannigfaltigkeiten

Es gibt zwei gängige Definitionen einer Untermannigfaltigkeit  $N \subset M$ , die sich dadurch unterscheiden, welche Eigenschaften man von der Inklusionsabbildung  $i: N \rightarrow M$  verlangt.

**Definition 3.1.** Seien  $N, M$  Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung  $i: N \rightarrow M$  heißt Immersion, wenn  $D_p f: T_p M \rightarrow T_p N$  injektiv für jedes  $p \in M$  ist. Eine Immersion  $i: N \rightarrow M$  heißt Einbettung, wenn  $i: N \rightarrow i(N) \subset M$  ein Homöomorphismus ist (d.h.  $i$  ist injektiv und  $i^{-1}: i(N) \rightarrow N$  ist stetig).

Dementsprechend gibt es zwei Definitionen einer Untermannigfaltigkeit, die in der Literatur zu finden sind:

- eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit  $i: N \rightarrow M$  ist eine Mannigfaltigkeit  $N$  zusammen mit einer injektiven Immersion  $i: N \rightarrow M$ ;
- eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit  $i: N \rightarrow M$  ist eine Mannigfaltigkeit  $N$  zusammen mit einer Einbettung  $i: N \rightarrow M$ .

Wir werden in diesem Kurs das Wort “Untermannigfaltigkeit” stets für eingebettete Untermannigfaltigkeit benutzen.

### 3.1 Satz vom konstanten Rang

Wir erinnern uns an den Satz über implizite Funktion, die wir früher in der Vorlesung bewiesen hatten.

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  glatt. Offensichtlich ist der Rang von  $f$  an jedem Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  kleiner oder gleich  $\min(n, k)$ . Man sagt,  $f$  habe *maximalen Rang* an einem Punkt, wenn der Rang von  $f$  an  $p$  gleich  $\min(n, k)$  ist.

Natürlicherweise tauchen hier zwei Varianten auf:

- $n \leq k$ ; dann ist der mögliche maximale Rang gleich  $n$ . Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang  $n$  (an jedem Punkt) ist die Einbettung  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\iota(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$ .
- $k \leq n$ ; dann ist der mögliche maximale Rang gleich  $k$ . Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang  $k$  (an jedem Punkt) ist die Projektion  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\pi(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_k)$ .

**Satz 3.2.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  glatt mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt:

- (i) Wenn  $n \leq k$  und  $f$  maximalen Rang ( $= n$ ) an  $0$  hat, dann gibt es eine Karte  $g$  von  $\mathbb{R}^k$  an  $0$  mit  $g \circ f = \iota$  auf einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^n$ ;
- (ii) Wenn  $k \leq n$  und  $f$  maximalen Rang ( $= k$ ) an  $0$  hat, dann gibt es eine Karte  $h$  von  $\mathbb{R}^n$  an  $0$  mit  $f \circ h = \pi$  auf einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^n$ ;

Man sollte anmerken, dass wegen des Satzes über implizite Funktion jede Immersion lokal eine Einbettung ist:

**Proposition 3.3.** Sei  $i: N \rightarrow M$  eine Immersion,  $\dim N = n$ ,  $\dim M = m$ . Dann gilt: für jedes  $p \in N$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$  in  $N$  und eine Karte  $(U, y)$  mit  $i(p) \in U \subset M$ , so dass:

- (i)  $q \in i(V) \cap U$  genau dann, wenn  $y^{n+1}(q) = \dots = y^m(q) = 0$  (anders gesagt,  $y(i(V) \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap y(V)$ );
- (ii)  $i|_V$  ist eine Einbettung.

*Beweis.* Sei  $x$  eine Kartenabbildung um  $p$  mit  $x(p) = 0$ ,  $\tilde{y}$  eine Kartenabbildung um  $i(p)$  mit  $\tilde{y} \circ i(p) = 0$ . Dann hat  $\tilde{y} \circ i \circ x^{-1}$  maximalen Rang ( $= n$ ) an  $0$ , also gibt es nach dem Satz über implizite Funktion (Satz 3.2) eine Karte  $g$  von  $\mathbb{R}^m$  und eine Umgebung  $W$  von  $0$  mit  $g \circ \tilde{y} \circ i \circ x^{-1}|_W = \iota|_W$ , wobei  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die kanonische Einbettung ist. Sei  $U := x^{-1}(W)$ ,  $y = g \circ \tilde{y}$ ; dann gilt (1) nach Konstruktion. (2) folgt dann, weil  $i|_U = y^{-1} \circ \iota \circ x|_U$  eine Verkettung von Einbettungen ist.  $\square$

## 3.2 Satz vom regulären Wert

Der Satz vom regulären Wert ist von zentraler Bedeutung in Differentialgeometrie, weil er uns erlaubt, Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

**Definition 3.4.** Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten von Dimension  $n$  bzw.  $k$ ,  $f: M \rightarrow N$  glatt. Ein Punkt  $p \in M$  heißt regulärer Punkt von  $f$ , wenn  $\text{Rang } D_p f = k$ ; andernfalls heißt  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Ein Punkt  $q \in N$  heißt regulärer Wert von  $f$ , wenn  $f^{-1}(q)$  keine kritischen Punkte enthält (z.B. weil  $q \notin f(M)$ ). Andernfalls heißt  $q$  kritischer Wert von  $f$ .

Wenn  $n \geq k$  ist (und das ist für uns der interessante Fall), heißt also die Bedingung, dass  $q \in N$  ein regulärer Wert von  $f$  ist so viel wie: an jedem Urbildpunkt von  $q$  hat  $f$  maximalen Rang ( $= k$ ).

**Satz 3.5** (Satz vom regulären Wert). *Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten von Dimension  $n$  bzw.  $k$  mit  $n \geq k$ ,  $f: M \rightarrow N$  glatt. Wenn  $q \in f(M)$  ein regulärer Wert ist, dann ist  $A := f^{-1}(q) \subset N$  (= die Faser von  $f$  an  $q$ ) eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ .*

*Beweis.* Sei  $y: V \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Karte um  $q \in N$  mit  $y(q) = 0$ . Sei außerdem  $p \in A$  und  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Karte um  $p \in M$ . Zerlege  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  und seien  $\pi_1, \pi_2$  die entsprechenden Projektionsabbildungen. Außerdem sei  $\iota_2: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Einbettung in die letzten Koordinaten:  $\iota_2(a_1, \dots, a_{n-k}) = (0, \dots, 0, a_1, \dots, a_{n-k})$ .

Da  $y \circ f \circ x^{-1}$  maximalen Rang an  $0 \in \mathbb{R}^n$  hat, gibt es nach Satz 3.2 (ii) eine Karte  $(W, h)$  um  $0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $y \circ f \circ x^{-1} \circ h = \pi_1|_W$ . Sei  $\widetilde{W} := \pi_2(W)$ . Dies ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n-k}$ , und  $y \circ f \circ x^{-1} \circ h \circ \iota_2 = \pi_1 \circ \iota_2 = 0$  auf  $\widetilde{W}$ . Das heißt, wenn  $z := x^{-1} \circ h \circ \iota_2|_{\widetilde{W}}$ , so folgt  $z(\widetilde{W}) \subset A$ . Nun behaupten wir, dass  $z(\widetilde{W}) = A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$ , so dass  $z$  ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Es ist zunächst klar, dass  $z(\widetilde{W}) \subset A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$ , weil  $z(\widetilde{W}) = (x^{-1} \circ h \circ \iota_2)(\widetilde{W}) = (x^{-1} \circ h)(W \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-k}))$ . Für die andere Inklusion nehmen wir ein  $\tilde{p} \in A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$ ; dann folgt aber  $\tilde{p} = (x^{-1} \circ h)(u)$  für ein eindeutig bestimmtes  $u \in W$ , und  $0 = (y \circ f)(\tilde{p}) = (y \circ f \circ x^{-1} \circ h)(u) = \pi_1(u)$ , so dass  $u = (0, a) \in 0 \times \widetilde{W}$ . Dann gilt aber  $\tilde{p} = z(a) \in z(\widetilde{W})$ . Es folgt, dass  $i: A \hookrightarrow M$  eine topologische Einbettung ist (also ein Homöomorphismus auf sein Bild).

Wir versehen nun  $A$  mit der glatten Struktur induziert durch die oben konstruierten Karten  $(z(\widetilde{W}), z^{-1})$ , wenn  $p$  die Menge  $A$  durchläuft (Übungsfrage: warum sind diese Karten kompatibel?). Dann ist die Inklusion  $i: A \hookrightarrow M$  sogar glatt, weil  $x \circ i \circ (z^{-1})^{-1} = h \circ \iota_2$ .  $\square$

*Beispiel 3.6.* Die Abbildung  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \mapsto \|a\|^2$ , erfüllt  $Df(a) = 2(a_1, \dots, a_{n+1})$ ; der Rang des Differentials ist also maximal ( $= 1$ ) an jedem Punkt außer 0. Das heißt, die Sphäre vom Radius  $r > 0$ ,  $S_r := f^{-1}(r)$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Bemerkung 3.7.* Der (höchst nichttriviale) Satz von Sard besagt, dass eine glatte Abbildung  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m \geq n$ ) stets "sehr viele" reguläre Werte hat (insbesondere ist die Menge

der regulären Werte stets dicht in  $\mathbb{R}^n$ ). Das heißt, dass eine “generische” Faser von  $f$  eine Untermannigfaltigkeit ist.

# 4 Vektorfelder und ihre Flüsse

## 4.1 Vektorfelder und ihre ersten Eigenschaften

**Definition 4.1.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $TM$  sein Tangentialbündel und  $\pi: TM \rightarrow M$  die Projektionsabbildung. Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  ist ein Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine glatte Abbildung  $X: M \rightarrow TM$  mit  $\pi \circ X = \text{id}_M$  (d.h.  $X(p) \in T_pM$  für jedes  $p \in M$ ).

Der Wert von  $X$  an einem Punkt  $p \in M$  wird durch  $X(p)$  oder  $X_p$  bezeichnet.

Wir notieren folgende Eigenschaften der Vektorfelder:

- (i) Die Vektorfelder bilden ein Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, weil der Wert eines Vektorfeldes an jedem Punkt  $p$  in dem Vektorraum  $T_pM$  liegt. Der Vektorraum der Vektorfelder auf  $M$  wird durch  $\Gamma(TM)$ ,  $\text{Vect}(M)$  oder  $\mathfrak{X}(M)$  bezeichnet.
- (ii) Man kann Vektorfelder mit glatten Funktionen multiplizieren: wenn  $X: M \rightarrow TM$  ein Vektorfeld ist und  $f \in C^\infty(M)$ , dann ist  $fX: p \mapsto f(p)X(p)$  auch ein Vektorfeld.
- (iii) Da Tangentialvektoren auf Funktionen durch Ableitungen wirken, kann man ein Vektorfeld  $X$  auf eine glatte Funktion  $f \in C^\infty(M)$  anwenden und eine neue Funktion  $X(f) \in C^\infty(M)$  bekommen mit

$$(X(f))(p) = X_p(f).$$

Diese Abbildung liefert einen Isomorphismus zwischen Vektorfeldern und Derivationen von  $C^\infty(M)$ :

$$\Gamma(TM) \xrightarrow{\cong} \text{Der}(C^\infty(M)),$$

$$X \mapsto (f \mapsto X(f))$$

(siehe Übungen). Insbesondere ist für je zwei Vektorfelder  $X, Y \in \Gamma(TM)$  ihr Kommutator  $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$  (gesehen als Derivation von  $C^\infty(M)$ ) auch ein

Vektorfeld.

(iv) wenn  $(U, x)$  eine Karte um  $p \in M$  ist, definiert sie die Koordinatenvektorfelder  $\partial/\partial x^i$  auf  $U$ . Daher kann jedes Vektorfeld auf  $U$  dargestellt werden als

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n dx^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Umgekehrt definiert in diesem Fall eine beliebige ‘‘Linearkombination’’

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit  $f_i \in C^\infty(V)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ein Vektorfeld  $X$  auf  $V$ .

*Beispiel 4.2.* Wenn  $M = \mathbb{R}^n$ , dann gilt  $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (Übung!). In diesem Falle kann man Vektorfelder  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$  mit glatten Funktionen  $\underline{X}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  identifizieren: ein Vektorfeld  $X$  entspricht eindeutig der Funktion  $u \mapsto (X(u^1), \dots, X(u^n))$ , also seinen Koordinaten bzgl.  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ .

### Verhalten von Vektorfeldern unter glatten Abbildungen

Wenn  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung ist, kann man **versuchen**, durch die Vorschrift

$$(f_*X)(f(p)) = D_p f(X_p) \tag{4.1}$$

ein Vektorfeld  $f_*X$  auf  $N$  zu definieren. Leider klappt es nicht immer:

**Warnung!** Wenn  $f: M \rightarrow N$  irgendeine glatte Abbildung ist, liefert die Formel (4.1) **kein** wohldefiniertes Vektorfeld auf  $N$ : ein Punkt  $q \in N$  kann mehrere Urbilder haben, die keinen eindeutigen Bildvektor definieren lassen.

**Definition 4.3.** Wenn  $f_*X$  durch Formel (4.1) tatsächlich wohldefiniert ist, ist es ein Vektorfeld, genannt *Pushforward* von  $X$  unter  $f$ .

Ein wichtiges Beispiel solcher Situation kommt vor, wenn  $f$  ein Diffeomorphismus ist.

Nach Definition gilt für  $\varphi \in C^\infty(N)$

$$(f_*X(\varphi))(f(p)) = (D_p f(X_p))(\varphi) = X_p(f^*(\varphi)), p \in M,$$



also ist  $f_*X$  (wenn es existiert!) eindeutig definiert durch die Eigenschaft

$$f^*(f_*X(\varphi)) = X(f^*(\varphi)). \quad (4.2)$$

Wenn  $f$  ein Diffeomorphismus ist, folgt

$$f_*X = (f^*)^{-1} \circ X \circ f^* \quad (4.3)$$

**Lemma 4.4.** *Wenn  $f_*X$  und  $f_*Y$  Vektorfelder sind, gilt:*

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C^\infty(N)$ . Unter Benutzung von (4.2) bekommen wir

$$\begin{aligned} ([X, Y](f^*(\varphi)))(p) &= f^*((f_*[X, Y])(\varphi))(p) = [([X, Y] \circ f^*)(\varphi)](p) \\ &= X_p(Y(f^*\varphi)) - Y_p(X(f^*\varphi)) = X_p(f^*(f_*Y(\varphi))) - Y_p(f^*(f_*X(\varphi))) \\ &= f^*(f_*X_p)(f_*Y(\varphi)) - f^*(f_*Y_p)(f_*X(\varphi)) = [f^*([f_*X, f_*Y](\varphi))](p). \end{aligned}$$

Somit ist  $f^*([f_*X, f_*Y](\varphi)) = [X, Y](f^*(\varphi))$ , und nach (4.2) bekommen wir das Gewünschte.  $\square$

## 4.2 Flüsse von Vektorfeldern

Eines der wichtigen Ergebnisse in der Analysis ist der Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (der Satz von Picard-Lindelöf). Dieser gilt auch auf Mannigfaltigkeiten und bildet somit interessanten Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und Diffeomorphismen. Wir fangen mit folgender Version des klassischen Satzes von Picard-Lindelöf in  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 4.5** (Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von DGLs erster Ordnung in  $\mathbb{R}^n$ ). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt. Dann existiert für jedes  $a \in U$  eine Umgebung  $W$  von  $a$ , ein offenes Intervall  $0 \in I \subset \mathbb{R}$  und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung  $\psi: I \times W \rightarrow U$  mit folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad \psi(0, u) = u,$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, u) = F(\psi(t, u)).$$

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn  $W_1, W_2 \subset W$  beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen  $\psi_1: I_1 \times W_1 \rightarrow U$ ,  $\psi_2: I_2 \times W_2 \rightarrow U$  wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf  $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$  überein.

Die Abbildung  $\psi(t, u)$  wird interpretiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = F(\psi(t)) \quad (4.4)$$

mit Anfangsbedingung  $\psi(0) = u$  am Zeitpunkt  $t$ : die zweite Bedingung besagt, dass  $\psi$  die Differentialgleichung löst, und die erste Bedingung besagt, dass der Anfangswert an  $t = 0$  gleich  $u$  ist.

Die Differentialgleichung (4.4) kann man auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  auch leicht interpretieren: eine glatte Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  hat an jeder Stelle einen Tangentialvektor  $\dot{\gamma}(t) = (D_t\gamma) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_p M$  – die linke Seite hat somit eine Interpretation als Element in  $T_p M$ . Die rechte Seite soll dann durch Vorgabe eines Tangentialvektors an jedem Punkt auf  $M$ , d.h. eines Vektorfeldes auf  $M$ , bestimmt sein.

Somit lässt sich der obige Satz wie folgt auf Mannigfaltigkeiten interpretieren:

**Satz 4.6** (Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes). *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Dann existiert für jedes  $q \in M$  eine Umgebung  $V$  von  $q$ , ein offenes Intervall  $0 \in I \subset \mathbb{R}$  und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung  $\Phi: I \times V \rightarrow M$  mit folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad \Phi(0, p) = p,$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) := \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right) (t, p) = X(\Phi(t, p)).$$

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn  $W_1, W_2 \subset W$  beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen  $\Phi_1: I_1 \times W_1 \rightarrow U$ ,  $\Phi_2: I_2 \times W_2 \rightarrow U$  wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf  $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$  überein.

*Beweis.* Sei  $(U, x)$  eine Karte um  $q$ . Setze  $G := x(U)$ ,  $a := x(q)$ ,

$$F := (dx^1(X), \dots, dx^n(X)) \circ x^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und wende den vorigen Satz an, um eine Abbildung  $\psi: I \times W \rightarrow G$  zu bekommen. Die Abbildung  $\Phi := x^{-1} \circ \psi$  ist dann nach Konstruktion die gesuchte: die Eigenschaften (1) und (2), geschrieben in Koordinaten mit Hilfe von  $x$ , sind genau die Bedingungen (1) und (2) des vorigen Satzes.  $\square$

Die Abbildung  $\Phi$  aus dem obigen Satz wird auch *lokaler Fluss* von  $X$  genannt. Für jedes  $p \in V$  ist dann  $\gamma(t) := \Phi(t, p)$  eine Kurve auf  $M$ , welche die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

sowie die Anfangsbedingung  $\gamma(0) = p$  erfüllt. Solche Kurven heißen *Integralkurven* von  $X$ .

Der obige Satz ist eine lokale Aussage, und es besteht *a priori* keine Hoffnung, das "Zeitintervall"  $I$  vergrößern zu können: es gibt sogar im Eindimensionalen Differentialgleichungen, dessen Integralkurven in einer endlichen Zeit ins Unendliche laufen, z.B.  $\dot{x} = x^2$  in  $\mathbb{R}$  (Übung: überzeugen Sie sich, dass die Integralkurven hier ins Unendliche in endlicher Zeit laufen und bestimmen Sie das zugehörige Vektorfeld!). Es gibt allerdings immer einen maximalen Definitionsbereich des Flusses:

**Satz 4.7** (Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes). *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte maximale offene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R} \times M$  mit  $\{0\} \times M \subset W$  und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung  $\Phi: W \rightarrow M$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $\Phi(0, p) = p$ ,
- (ii)  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) := \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\right)(t, p) = X(\Phi(t, p))$ ,
- (iii) für jedes  $p \in M$ ,  $W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I_p \times \{p\}$ , wobei  $I_p \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I_p$  ist.

*Beweis.* Der vorige Satz liefert die Existenz einer offenen Teilmenge

$$W_0 = \bigcup_{q \in M} I_q \times V_q$$

zusammen mit einer eindeutigen glatten Abbildung  $\Phi: W_0 \rightarrow M$  mit gewünschten Eigenschaften (die Eindeutigkeitsaussage aus dem vorigen Satz impliziert, dass  $\Phi$  wohldefiniert auf  $W_0$  ist).

Sei nun  $\mathcal{W} = \{(W, \Phi) \mid (W, \Phi) \text{ erfüllen (i), (ii), (iii)}\}$  die Familie von allen offenen Teilmengen, welche die Aussage des Satzes erfüllen. Wenn nun  $(W', \Phi')$  und  $(W'', \Phi'')$  zwei Elemente aus  $\mathcal{W}$  sind, folgt aus der Eindeutigkeit, dass  $\Phi'$  und  $\Phi''$  auf  $W' \cap W''$  übereinstimmen, weswegen sie sich zu einer eindeutig bestimmten glatten Abbildung  $\Phi: W' \cup W'' \rightarrow M$

fortsetzen. Das ergibt, dass auf der Vereinigung

$$W := \bigcup_{(W', \Phi') \in \mathcal{W}} W'$$

eine glatte Abbildung  $\Phi: W \rightarrow M$  durch  $\Phi|_{W'} := \Phi'$  wohldefiniert ist. Sie erfüllt offensichtlich die Aussage des Satzes.  $\square$

**Definition 4.8.** Die Abbildung  $\Phi: W \rightarrow M$  heißt maximaler Fluss von  $X$ .  $X$  heißt vollständig, wenn  $W = \mathbb{R} \times M$  ist, d.h. wenn der Fluss immer definiert ist.

*Übung 4.9.* Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig ist.

Sei  $X$  nun ein vollständiges Vektorfeld auf  $M$ . Wir definieren  $\Phi_t: M \rightarrow M$  durch  $\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$  und beobachten folgende fundamentale Eigenschaft:

**Proposition 4.10.**

$$\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$$

*Beweis.* Nach Definition ist  $\Phi_{t_1+t_2}(p)$  der Wert an  $t = t_1 + t_2$  der Integralkurve  $\gamma_p$  von  $X$  mit Anfangswert  $p$ .  $\Phi_{t_2}(p)$  ist der Wert derselben Integralkurve an  $t = t_2$ , und  $\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p))$  ist der Wert an  $t = t_1$  der Integralkurve von  $X$  mit Anfangswert  $\Phi_{t_2}(p)$ . Nach Eindeutigkeit ist die letztere aber gleich  $\gamma_p(t + t_2)$ , und ihr Wert an  $t_1$  ist  $\gamma_p(t_1 + t_2)$ , wie gewünscht.  $\square$

**Korollar 4.11.**

(i)  $\Phi_t: M \rightarrow M$  ist ein Diffeomorphismus für jedes  $t \in \mathbb{R}$ ;

(ii) die Abbildung  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ ,  $t \mapsto \Phi_t$ , ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 4.12.** Eine glatte Abbildung  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  mit  $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$  ( $\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$ ) heißt eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen von  $M$ .

Gegeben eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen, bekommen wir das Vektorfeld  $X$ , welches sie erzeugt, auch zurück durch

$$X_p := \Phi_{*,(0,p)} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dieses Vektorfeld hat nach Konstruktion  $\Phi$  als zugehörigen maximalen Fluss: diese Gleichung ist genau die Bedingung (2) aus der Definition des Flusses eines Vektorfeldes. Somit haben wir festgestellt:

**Proposition 4.13.** *Es gibt eine 1:1-Korrespondenz zwischen Einparametergruppen von Diffeomorphismen von  $M$  und vollständigen Vektorfeldern auf  $M$ .*

# 5 Lie-Gruppen

## 5.1 Definitionen und Beispiele

In der linearen Algebra studiert man oft Matrixgruppen, und von besonderer Bedeutung sind da Gruppen von Matrizen mit reellen oder komplexen Einträgen. Diese bilden auf natürliche Weisen auch Mannigfaltigkeiten, so dass es sich lohnt, solche Objekte systematisch zu studieren, da sie auch „kontinuierliche Symmetrien“ beschreiben. Wir werden sehen, dass das Studium von solchen Gruppen – sie werden Lie-Gruppen genannt – auch interessante Einblicke in die Differentialgeometrie als solche liefert.

Wir haben bereits gesehen, dass die Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  zugleich eine Mannigfaltigkeit ist (weil es eine offene Teilmenge von  $M_n(\mathbb{R})$  ist). Zugleich ist es aber bekanntermaßen eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation. Noch besser: die Strukturabbildungen der Gruppe (Multiplikation, bilden von Inversen) sind glatt:

- $(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} \longrightarrow$  glatte Funktionen von  $A_{ij}, B_{jk}$  (sogar Polynome!)
- $(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{Cof}(A)_{ji}}{\det A}$

$$\text{Cof}(A)_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

**Definition 5.1.** Eine Lie-Gruppe  $G$  ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit glatten Abbildungen  $\cdot: G \times G \rightarrow G$ ,  $^{-1}: G \rightarrow G$ , so dass  $(G, \cdot, ^{-1})$  eine Gruppe ist

Wir sammeln nur einige Beispiele

*Beispiel 5.2.*  $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$  sind Lie-Gruppen.

*Beispiel 5.3.*  $(\mathbb{R}, +)$  ist eine Lie-Gruppe

*Beispiel 5.4.*  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  ist eine Lie-Gruppe. Da Multiplikation und Invertieren von  $GL_n(\mathbb{R})$  vererbt sind, reicht es zu zeigen, dass  $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu benutzen wir den Satz vom regulären Wert. Zu zeigen:  $\forall A \in SL_n(\mathbb{R})$  gilt:  $D_A \det$  hat vollen Rang ( $= 1$ )  $\Leftrightarrow D_A \det \neq 0$

Sei  $X \in T_A \mathbb{R}^{n^2}$ .

$$D_A \det(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(A + \varepsilon X) - \det(A)}{\varepsilon} = \det(A) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbb{1} + \varepsilon \overbrace{A^{-1}X}^{=:Y}) - 1}{\varepsilon} = \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}X)$$

wobei

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + \varepsilon Y) &= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon y_{11} & \cdots & \varepsilon y_{1n} \\ \varepsilon y_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon y_{n1} & \cdots & 1 + \varepsilon y_{nn} \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Leibniz}}{=} \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon y_{ii}) + \varepsilon^2(\dots) \\ &= 1 + \varepsilon(y_{11} + \dots + y_{nn}) + \varepsilon^2(\dots) \\ &= 1 + \varepsilon \cdot \text{Tr}(Y) \end{aligned}$$

Somit hat  $D_A \det$  tatsächlich Rang 1.

*Beispiel 5.5.* Analog sind folgende Gruppen auch Lie-Gruppen (Beweise werden teilweise in den Übungen nachgeliefert):

- $O(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$   
 $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$
- $U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}\}$   
 $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$
- $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$   
 $SO(n, \mathbb{C}) = \{A \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$

- $O(p, q) = \{A \in M_{p+q}(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle_{p,q} = \langle x, y \rangle_{p,q}\}$  mit

$$\langle x, y \rangle_{p,q} := \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=1}^q x_{p+j} y_{p+j} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Beispielsweise:  $O(1, 3)$  erhält die quadratische Form  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  (Minkowsky-Raum, SRT)

- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $S^1 = U(1)$
- $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n$  ist auch eine Lie-Gruppe

Es gibt einen allgemeinen Satz, der die Theorie der Lie-Gruppen ziemlich angenehm macht. Den Beweis werden wir allerdings hier nicht erbringen.

**Satz 5.6** (Cartan). *Sei  $G$  eine Lie-Gruppe,  $H \leq G$  eine abgeschlossene (bezüglich der Topologie von  $G$ ) Untergruppe. Dann ist  $H$  eine Untermannigfaltigkeit und somit automatisch eine Lie-(Unter)gruppe.*

## 5.2 Wirkungen von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten

Eine der wichtigsten Ideen in der Mathematik ist, dass man Objekte durch ihre Symmetriegruppen beschreiben kann. Speziell in der Differentialgeometrie ist diese Idee erst mal in 1872 von Felix Klein im sogenannten Erlangen-Programm formuliert: Mannigfaltigkeiten („Geometrien“) sollte man durch ihre Symmetriegruppen studieren (die natürlich Lie-Gruppen sein sollen). Formalisiert wird es durch die Theorie der Gruppenwirkungen.

**Definition 5.7.** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Eine Wirkung  $\alpha: G \curvearrowright M$  ist eine glatte Abbildung  $\alpha: G \times M \rightarrow M$ , welche einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha_{(\cdot)}: G \rightarrow \text{Diff}(M)$ ,  $g \mapsto (m \mapsto \alpha(g, m))$  definiert.

Ist eine Wirkung festgelegt, schreiben wir kurzerhand  $g \cdot m$  für  $\alpha(g, m)$ .

Jede Wirkung definiert für jeden Punkt  $m \in M$  die Orbitabbildung  $\psi_m: G \rightarrow M$ ,  $g \mapsto g \cdot m$ , deren Bild genau das Orbit (= die Bahn)  $\mathcal{O}_m = G \cdot m \subseteq M$  ist. Das Differential dieser Abbildung an 1 ist dann eine Abbildung

$$D_1 \psi_m: \mathfrak{g} \cong T_1 G \rightarrow T_m M,$$



die man alternativ beschreiben kann als  $(D_{(1,m)}\alpha)|_{T_1G}$ ; daher hängt sie auch glatt von  $m \in M$  ab. Das heißt, jedes Element  $\xi \in \mathfrak{g}$  definiert ein Vektorfeld

$$K_\xi(m) := D_1\psi_m(\xi) \in T_mM;$$

es heißt *Killing-Vektorfeld* zu der Wirkung.

Wir erinnern uns an folgenden Satz aus der Algebra.

**Satz 5.8** (Klassifikation von transitiven Wirkungen). *Jede transitive Wirkung  $G \curvearrowright X$  ist isomorph zu der Linkswirkung  $G \curvearrowright G/H$ , wobei  $H = \text{Stab}(x_0)$  der Stabilisator eines Punktes  $x_0 \in X$  ist. (Zur Erinnerung: „isomorph“ heißt hier, dass es eine Bijektion  $\phi: X \rightarrow G/H$  gibt, die äquivariant ist:  $\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x)$  für alle  $g \in G, x \in X$ .)*

Dieses Ergebnis ist rein mengentheoretisch, und unser Hauptziel wird sein, den relevanten Objekten wie z. B. dem Quotienten  $G/H$  oder dem Quotienten  $M/G$  die Struktur einer Mannigfaltigkeit zu geben. Zunächst müssen wir den eine Topologie geben.

**Definition 5.9** (Quotiententopologie). Sei  $M$  ein topologischer Raum,  $\alpha: G \rightarrow \text{Homeo}(M)$  eine Wirkung einer Gruppe durch Homöomorphismen und  $q: M \rightarrow M/G$  die Quotientenabbildung. Die Quotiententopologie auf  $M/G$  wird folgendermaßen definiert: eine Teilmenge  $U \subseteq M/G$  ist offen genau dann, wenn  $q^{-1}(U)$  offen ist.

Manchmal ist die Quotiententopologie recht pathologisch: wenn man z. B. den Fluss eines konstanten Vektorfeldes  $\partial/\partial\varphi + \sqrt{2}\partial/\partial\theta$  auf dem Torus  $\mathbb{T}^2$  als Wirkung  $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{T}^2$  auffasst, wird jede Bahn dicht sein und daher die Quotiententopologie trivial. (Beweis: wenn  $F \subseteq \mathbb{T}^2/\mathbb{R}$  abgeschlossen und nicht leer ist, ist sein Urbild  $q^{-1}(F) \subseteq \mathbb{T}^2$  abgeschlossen und enthält eine Bahn, also ist gleich dem ganzen Torus.)

**Lemma 5.10.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $N$  eine Menge und  $q: M \rightarrow N$  eine Surjektion. Es gibt höchstens eine Struktur einer Mannigfaltigkeit auf  $N$ , die  $q$  zu einer Submersion macht.*

*Beweis.* Für eine beliebige glatte Struktur auf  $N$ , welche  $q: M \rightarrow N$  zu einer Submersion macht, muss gelten:  $\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann glatt, wenn  $\varphi \circ q$  glatt ist.  $\square$

**Satz 5.11.** *Wenn  $G$  eine Lie-Gruppe ist und  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe, hat der Raum der Nebenklassen  $G/H$  eine eindeutig bestimmte Struktur einer Mannigfaltigkeit, so dass  $q: G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist. Der Tangentialraum  $T_{[1]}G/H$  ist kanonisch isomorph zu  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ .*

*Beweis.* Für jedes  $g \in G$  ist die Abbildung  $\iota_g: H \rightarrow G, h \mapsto gh$  eine Einbettung: sie bettet  $H$  in  $G$  als Nebenklasse ein, die genau die Verschiebung von  $H$  um  $g$  ist. Daher ist jede Nebenklasse abgeschlossen. Beweisen wir nun, dass  $G/H$  ein Hausdorffraum ist: wenn  $g_1$ , und  $g_2$  in unterschiedlichen Nebenklassen liegen, gibt es Umgebungen  $U_1 \ni g_1$  und  $U_2 \ni g_2$ , so dass  $U_1 \cap U_2 H = \emptyset$  und  $U_1 H \cap U_2 = \emptyset$ , da Nebenklassen abgeschlossen sind. Daher gilt auch  $U_1 H \cap U_2 H = \emptyset$ , folglich sind  $q(U_1) = q(U_1 H)$  und  $q(U_2) = q(U_2 H)$  offene Umgebungen von  $[g_1]$  bzw.  $[g_2]$  in  $G/H$  mit trivialem Durchschnitt. Also ist die Quotiententopologie auf  $G/H$  hausdorffsch; sie ist auch zweitabzählbar, weil  $G$  zweitabzählbar ist.

Sei nun  $[g] \in G/H$  mit  $g \in G$ . Da  $gH \subseteq G$  eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine Umgebung  $V \ni g$  und eine Umgebung  $W \subseteq H$  mit  $1 \in W$ , so dass  $V \cong W \times \mathbb{R}^k$ . Die Projektionsabbildung definiert dann einen Homoöomorphismus  $q(V) \cong \mathbb{R}^k$ , und die glatte Struktur auf  $G/H$  ist dann dadurch definiert, dass es ein Diffeomorphismus ist; wir beobachten auch, dass für jede glatte Struktur, für die  $q$  eine Submersion ist,  $q(V) \cong \mathbb{R}^k$  ein Diffeomorphismus sein muss. Nach vorigem Lemma ist diese glatte Struktur eindeutig.

Die Aussage über den Tangentialraum folgt daraus, dass offensichtlich  $\text{Ker } D_1 q \supseteq \mathfrak{h}$ , und dass aus Dimensionsgründen Gleichheit gelten muss.  $\square$

**Definition 5.12.** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind: für jedes kompakte  $K \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(K) \subseteq X$  kompakt. Eine Wirkung  $\alpha: G \curvearrowright M$  heißt *eigentlich*, wenn die Abbildung  $G \times M \rightarrow M \times M, (g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$  eigentlich ist.

**Lemma 5.13.** Sei  $\iota: N \rightarrow M$  eine injektive Immersion. Sie ist genau dann eine Einbettung, wenn sie eigentlich ist.

*Beweis.* Eine Einbettung ist ein Homöomorphismus auf sein Bild, und das impliziert sofort, dass es eine eigentliche Abbildung ist. Sei nun  $\iota$  eigentlich. Wir müssen zeigen, dass  $\iota^{-1}: \iota(N) \rightarrow N$  stetig ist. Sei also  $F \subseteq N$  abgeschlossen; dann ist  $(\iota^{-1})^{-1}(F) = \iota(F) \subseteq \iota(N)$ . Wir zeigen nun, dass es abgeschlossen ist. Sei  $m = \iota(n) \in \overline{\iota(F)}$  und  $K \subseteq M$  eine kompakte Umgebung von  $m$ . Nun ist  $\iota^{-1}(K) \cap F \subseteq N$  kompakt, weil  $\iota$  eigentlich ist, und es gilt:  $\iota(\iota^{-1}(K) \cap F) = K \cap \iota(F) \subseteq M$  kompakt, weil  $\iota$  stetig ist. Das impliziert  $m \in \iota(F)$ , also ist die letztere abgeschlossen.  $\square$

**Satz 5.14.** Sei  $G \curvearrowright M$  eine Wirkung. Jede Bahn  $\mathcal{O}_m$  ist eine immensierte Untermannigfaltigkeit von  $M$ , die eingebettet ist, wenn die Wirkung eigentlich ist. Der Tangentialraum von  $\mathcal{O}_m$  ist durch die Killing-Vektorfelder aufgespannt.

*Beweis.* Sei  $H := \text{Stab}(m) \leq G$ . Das ist eine Lie-Untergruppe, und die Orbitabbildung  $\psi_m: G \rightarrow \mathcal{O}_m$  faktorisiert zu einer glatten bijektiven  $G$ -äquivalenten Abbildung  $\overline{\psi}_m: G/H \rightarrow \mathcal{O}_m$ ,  $[g] = gH \mapsto g \cdot m$ . Da  $\overline{\psi}_m$  äquivalent ist, gilt

$$\overline{\psi}_m \circ L_g = \alpha_g \circ \overline{\psi}_m$$

und es folgt

$$D_{[g]}\overline{\psi}_m \circ D_{[1]}L_g = D_m\alpha_g \circ D_{[1]}\overline{\psi}_m,$$

also hat  $D\overline{\psi}_m$  konstanten – vollen – Rang. Somit ist es eine injektive Immersion. Wenn die Wirkung eigentlich ist, ist  $\psi_m$  und somit  $\overline{\psi}_m$  auch eigentlich, und somit eine Einbettung nach vorigem Lemma. Die Aussage über den Tangentialraum folgt aus dem vorigen Satz.  $\square$

**Satz 5.15.** *Sei  $\alpha: G \curvearrowright M$  eine freie und eigentliche Wirkung. Der Quotient  $M/G$  hat eine eindeutig bestimmte glatte Struktur, so dass die Quotientenabbildung  $q: M \rightarrow M/G$  eine Submersion ist.*

*Beweis.* Da die Wirkung frei ist, gilt für jedes  $m \in M$ :  $T_m\mathcal{O}_m \cong \mathfrak{g}$ . Wir wählen jetzt eine Untermannigfaltigkeit  $S \subset M$  mit  $m \in S$  und  $T_mM = T_m\mathcal{O}_m \oplus T_mS$  (dies kann man durch passende Wahl der lokalen Koordinaten erreichen). Die Wirkung  $\alpha$  schränkt sich zu einer Abbildung  $\varphi: G \times S \rightarrow M$  ein mit  $D_{(1,m)}\varphi: T_mM \xrightarrow{\cong} T_m\mathcal{O}_m \oplus T_mS$  gleich dem gewählten Isomorphismus. Diese Abbildung ist äquivalent:  $\varphi(gh, s) = gh \cdot s = g \cdot \varphi(h, s)$ , und daher folgt – wie im Beweis des vorigen Satzes – dass  $D_{(g,m)}\varphi$  invertierbar für alle  $g \in G$  ist. Aus Stetigkeitsgründen folgt nun, dass  $D_{(g,s)}\varphi$  invertierbar für alle  $(g, s) \in G \times S$  bleibt, wenn man  $S$  eventuell verkleinert; also ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus auf sein Bild.

Wir behaupten nun, dass nach eventueller Verkleinerung von  $S$  die Abbildung  $\varphi: G \times S \rightarrow \varphi(G \times S) =: V \subseteq M$  bijektiv wird und somit ein Diffeomorphismus (ein bijektiver lokaler Diffeomorphismus ist offensichtlich ein „echter“ Diffeomorphismus). Dies beweisen wir durch Widerspruch: wenn beliebige Verkleinerungen von  $S$  es nicht erzwingen können, bekommen wir eine nicht-konvergente Folge  $(g_k, m_k) \in G \times S$  mit  $m_k \rightarrow m$  und  $g_k \cdot m_k = m$ . Es folgt  $g_k^{-1}m = m_k \rightarrow m$ . Die Folge  $(m_k, m)$  ist somit in einer kompakten Teilmenge in  $M \times M$  enthalten, also folgt aus Eigentlichkeit der Wirkung, dass  $g_k$  in einer kompakten Teilmenge von  $G$  enthalten ist. Somit gilt für jede konvergente Teilfolge  $g_{k_n}$  von  $g_k$ :  $g_{k_n}m = m_{k_n} \rightarrow m$ , also konvergiert  $g_{k_n} \rightarrow 1$ , weil die Wirkung frei ist. Nun wurde aber  $g_k$  als nicht konvergent vorausgesetzt, was ein Widerspruch ist (wenn jede Teilfolge eine konvergente

Teilfolge enthält, und die Grenzwerte dieser Teilfolgen gleich sind, ist die Folge selbst konvergent).

Somit identifiziert der Diffeomorphismus  $\varphi: G \times S \rightarrow V$  den Quotienten  $q(V)$  mit  $S$ . Dies induziert eine glatte Struktur auf  $q(V)$ , so dass die Quotientenabbildung eine Submersion ist. Nach dem Lemma über Eindeutigkeit der glatten Struktur auf dem Quotienten ist diese eindeutig.  $\square$

*Beispiel 5.16.* Die Gruppe  $SO(n+1)$  wirkt transitiv auf der Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Der Stabilisator vom Nordpol ist gleich

$$\text{Stab}((1, 0, \dots, 0)^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & SO(n) & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \cong SO(n)$$

Somit gilt  $S^n \cong SO(n+1)/SO(n)$ .

Als kleine Anwendung beweisen wir nun, dass die Gruppe  $SO(n)$  zusammenhängend ist, oder allgemeiner:

**Proposition 5.17.** *Sei  $G$  Lie-Gruppe,  $H \trianglelefteq G$  abgeschlossene Untergruppe. Sind  $H, G/H$  zusammenhängend, so ist auch  $G$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Angenommen:  $G = A \sqcup B$ ,  $A, B$ . Wir können annehmen, dass  $1 \in A$ . Jede Nebenklasse  $gH$  ist zusammenhängend, weil  $H$  es ist. Nun gilt  $gH = (gH \cap A) \sqcup (gH \cap B)$ , und daher ist eine dieser Mengen leer. Das heißt, jede Nebenklasse von  $H$  liegt vollständig in  $A$  oder vollständig in  $B$ .

Nun gilt  $G = \bigsqcup_{[g] \in G/H} gH$  als Menge, also ist  $q(A) \sqcup q(B) = G/H$  dargestellt eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen, weil

$$q^{-1}(q(A)) = A, \quad q^{-1}(q(B)) = B.$$

Da  $G/H$  zusammenhängend ist, ist eine von  $q(A), q(B)$  leer, und somit muss eine der Mengen  $A$  oder  $B$  leer gewesen sein.  $\square$

**Korollar 5.18.** *Die Gruppe  $SO(n)$  ist zusammenhängend für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

## 5.3 Lie-Algebren

Eine Gruppe wirkt stets auf sich selbst frei und transitiv durch die Linkswirkung  $L: G \curvearrowright G$  (und von rechts durch die Rechtswirkung, die wir aber seltener benutzen werden). Das heißt, wir können diverse Objekte auf  $G$  durch diese Wirkung transportieren, zum Beispiel Tangentialvektoren.

Sei  $\xi \in T_1G$ . Wir definieren das Vektorfeld

$$X_\xi(h) := (L_h)_*\xi, \quad h \in G.$$

**Definition 5.19.** Ein Vektorfeld  $X$  auf  $G$  heißt linksinvariant, wenn für alle  $g \in G$  gilt:  $(L_g)_*X = X$ .

**Lemma 5.20.** Das Vektorfeld  $X_\xi$  ist linksinvariant, und jedes linksinvariante Vektorfeld von  $G$  ist von der Form  $X_\xi$  für ein eindeutig bestimmtes  $\xi$ . Das heißt, die Auswertungsabbildung an 1

$$\text{ev}_1: \{\text{linksinvariante Vektorfelder}\} \rightarrow T_1G$$

ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Das Vektorfeld  $X_\xi$  ist linksinvariant:

$$(L_g)_*X_\xi(h) = (L_g)_*(L_h)_*\xi = (L_{gh})_*\xi = X_\xi(hg),$$

also gilt  $(L_g)_*X_\xi = X_\xi$ ,  $g \in G$ .

Ist nun  $X$  linksinvariant, so gilt definitionsgemäß  $X(g) = (L_g)_*X(1)$ , also folgt  $X = X_\xi$  für  $\xi = X(1)$ .  $\square$

*Beispiel 5.21.* Sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $G \leq \text{GL}(n, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{n^2}$ . Wir benutzen die Einträge der Matrix als Koordinaten. D.h.  $X \in \Gamma(TG)$  wird eindeutig beschrieben durch eine Funktion

$$\hat{X}: G \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

Wenn  $X$  linksinvariant ist, ist es eindeutig durch  $X(1) \in T_1G$  bestimmt  $\rightsquigarrow \hat{X}$  ist eindeutig durch

$$\hat{X}(1) =: A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

bestimmt.

$$\hat{X}(g) = (L_g)_* \hat{X}(1) = (L_g)_* A = g \cdot A$$

da  $L_g$  die Matrizenmultiplikation von links ist: ( $g \in \text{GL}(n, K)$ )

$$\begin{aligned} L_g: \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \\ Y &\mapsto gY \end{aligned}$$

Also sind linksinvariante Vektorfelder alle von der Form  $\hat{X}(g) = gA$

$$A \in T_1 G \subseteq T_1 \text{GL}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

Wir erinnern uns an folgende Tatsachen aus den Übungen:

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) &\cong \text{Der}(C^\infty(M)) \\ \delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(A) &\Rightarrow [\delta_1, \delta_2] \in \text{Der}(A) \\ [\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]] &= 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}) \end{aligned}$$

**Definition 5.22.** Eine Lie-Algebra  $(V, [\cdot, \cdot])$  ist ein Vektorraum  $V$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ , die Jacobi-Identität erfüllt:

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0 \quad (v_1, v_2, v_3 \in V)$$

*Beispiel 5.23.* (i)  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $[A, B] = AB - BA$  ist eine Lie-Algebra

(ii)  $A$  assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $[a, b] := ab - ba$

(iii)  $\text{Der}(A)$  ist eine Lie-Algebra, wenn  $A$  eine assoziative Algebra ist.

(iv)  $\Gamma(TM) \cong \text{Der}(C^\infty(M))$  ist eine Lie-Algebra.

Nach Lemma 4.4 ist die Lie-Klammer zweier linksinvarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe  $G$  auch linksinvariant:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*, (L_g)_*Y] = [X, Y].$$

**Definition 5.24.** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Die Lie-Algebra von  $G$  genannt  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  ist die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$ .

Nach Lemma 5.20 gilt

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\text{ev}_1]{\cong} T_1G \Rightarrow \dim \mathfrak{g} = \dim G$$

Sei nun  $G \leq \text{GL}(n, \mathbb{K})$  eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\cong T_1G \subseteq T_1 \text{GL}(n, \mathbb{K}) \cong \text{M}_n(\mathbb{K}) \\ \hat{X}_A(g) = gA &\quad \mapsto \quad A \end{aligned}$$

**Proposition 5.25.** Die obige Abbildung identifiziert  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  mit einer Lie-Unteralgebra von  $(\text{M}_n(\mathbb{K}), [\cdot, \cdot])$ , wobei in  $\text{M}_n(\mathbb{K})$  der herkömmliche Kommutator von Matrizen benutzt wird.

*Beweis.* Seien  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Diese Vektorfelder, in Koordinaten geschrieben, entsprechen den Funktionen

$$\hat{X}: g \mapsto gA \text{ bzw. } \hat{Y}: g \mapsto gB$$

Wir wollen  $\widehat{[X, Y]}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \widehat{[X, Y]}(g) &= [X(\hat{Y}) - Y(\hat{X})](g) \\ &= (D_g \hat{Y})(\hat{X}(g)) - (D_g \hat{X})(\hat{Y}(g)) \\ &= \hat{X}(g) \cdot B - \hat{Y}(g) \cdot A \\ &= g(AB - BA). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $D_g(\hat{Y}) = D_g(g \mapsto gB)$  gleich der Rechtsmultiplikation mit  $B$  ist. Es folgt

$$\widehat{[X, Y]}(1) = AB - BA = [A, B] \in \text{M}_n(K)$$

□

In praktischen Termen bedeutet die obige Proposition, dass es für die Berechnung der

Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe ausreicht, den Tangentialraum an 1 zu bestimmen, die Struktur der Lie-Algebra wird dann automatisch durch den Kommutator von Matrizen bestimmt.

Den Tangentialraum einer Matrixgruppe an 1 kann man oft durch Ableiten von definierenden Gleichungen bestimmen: wenn  $\gamma(t) \in G$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = 1$  ist, bekommt man die Bedingungen an  $\dot{\gamma}(0)$  durch Ableiten von Bedingungen an  $\gamma(t)$  an  $t = 0$ . Um dann zu begründen, dass man so den ganzen Tangentialraum berechnet hat, ist folgende Konstruktion nützlich: wenn  $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  eine Matrix ist, ist die Familie  $\exp(tX)$  eine 1-Parameter-Untergruppe von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  (d.h.  $t \mapsto \exp(tX)$  ist ein Gruppenhomomorphismus). Die allgemeine Bedeutung dieser Konstruktion wird in einer der nachfolgenden Übungen präzisiert.

*Übung 5.26.* Berechnen Sie die Lie-Algebren der allgemeinen linearen, speziellen linearen, orthogonalen und unitären Matrixgruppen über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ .

*Übung 5.27.* Sei  $G$  eine Lie-Gruppe,  $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$  ihre Lie-Algebra. Sei  $\xi \in \mathfrak{g}$ ; es ist nach Definition ein linksinvariantes Vektorfeld. Sei  $\Phi: I \times G \rightarrow G$  der zugehörige Fluss.

- (i) Beweisen Sie, dass  $\Phi$  auch linksinvariant ist:  $\Phi_t(gh) = g\Phi_t(h)$  für alle  $g, h \in G$ .
- (ii) Definiere  $\exp(t\xi) := \Phi_t(1)$ ,  $t \in I$ . Beweisen Sie, dass  $\exp((t+s)\xi) = \exp(t\xi)\exp(s\xi)$  für alle  $s, t \in I$  mit  $s+t \in I$ .
- (iii) Folgern Sie, dass man  $\exp(\cdot\xi)$ ,  $t \mapsto \exp(t\xi)$  zu einem Gruppenhomomorphismus  $\exp(\cdot\xi): \mathbb{R} \rightarrow G$  fortsetzen kann. (Sein Bild heißt die 1-Parameter-Untergruppe von  $G$  definiert durch  $\xi$ ).
- (iv) Folgern Sie, dass  $\xi$  ein vollständiges Vektorfeld ist.

*Übung 5.28.* In der vorigen Übung wurde die Exponentialabbildung

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$\xi \mapsto \exp(\xi)$$

definiert. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (i)  $D_0 \exp = \mathrm{id}: \mathfrak{g} \rightarrow T_1 G \cong \mathfrak{g}$ ;
- (ii)  $\exp$  ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung von  $0 \in \mathfrak{g}$  auf eine Umgebung von  $1 \in G$ ;



(iii) wenn  $G$  zusammenhängend ist, wird  $G$  durch das Bild von  $\exp$  erzeugt.

*Übung 5.29.* Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (i) ein glatter Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  induziert einen Homomorphismus  $\varphi_*: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ihrer Lie-Algebren;
- (ii) ist  $G_1$  zusammenhängend, so ist  $\varphi$  eindeutig durch  $\varphi_*$  bestimmt.

*Übung 5.30.* Sei  $G \curvearrowright M$  eine (glatte) Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ ,  $\psi_m: G \rightarrow M$ ,  $g \mapsto g \cdot m$  die Orbit-Abbildung zu  $m \in M$  und sei

$$K: \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TM),$$

$$\xi \mapsto K_\xi$$

die Abbildung, die dem  $\xi \in \mathfrak{g} \cong T_1G$  das Killing-Vektorfeld

$$K_\xi(m) := D_1\psi_m \in T_mM$$

zordnet. Beweisen Sie, dass  $-K$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist:

$$K_{[\xi, \eta]} = -[K_\xi, K_\eta].$$

*Übung 5.31.* In dem (recht kontroversen) Essay „On teaching mathematics“<sup>1</sup> schreibt Wladimir Arnold:

„Die Jacobi-Identität (welche erzwingt, dass die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden) ist ein Erfahrungssatz genau in der gleichen Weise wie die Tatsache, dass die Erde rund ist (d.h. homöomorph zu einer Kugel).“

Finden Sie heraus, auf welche Weise die Jacobi-Identität erzwingt, dass die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.

## 5.4 Vektorfelder als Lie-Algebra der Diffeomorphismengruppe

Wir haben bereits gesehen, dass es zwischen Diffeomorphismen und Vektorfeldern (besonders auf einer kompakten Mannigfaltigkeit) eine Entsprechung gibt, die der zwischen den

---

<sup>1</sup>Englische Version z. B. hier: <https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/arnold.html>

Lie-Gruppen und Lie-Algebren ähnelt: Diffeomorphismen bilden eine Gruppe, Vektorfelder eine Lie-Algebra, und Vektorfelder sind gerade Ableitungen von 1-Parameter-Gruppen von Diffeomorphismen.

Wir können daher hoffen, dass wir den Kommutator von Vektorfeldern geometrisch im Geiste der Gruppenwirkungen interpretieren können, und es stimmt tatsächlich, wie wir bald sehen werden. Zunächst werden wir aber von der Tatsache Gebrauch machen, dass Diffeomorphismen Funktionen und (Ko-)Tangentialvektoren zwischen Punkten transportieren können.

Sei  $X$  nun ein Vektorfeld und  $\Phi_t$  die zugehörige (lokale) 1-Parameter-Diffeomorphismengruppe. Nach dem bekannten Zusammenhang zwischen  $X$  und  $\Phi$  gilt:

$$X(\varphi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^*(\varphi)$$

Explizit heißt es

$$(X(\varphi))(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Phi_t(p)) - \varphi(p)}{t}.$$

Wenn wir nun zum Beispiel ein Vektorfeld  $Y$  nach  $X$  ableiten wollen, können wir analog folgende Definition einführen:

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})_*(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p}{t}.$$

Man beachte, dass es keinen direkten Weg gibt,  $Y_{\Phi_t(p)}$  mit  $Y_p$  zu vergleichen, weil sie in verschiedenen Tangentialräumen liegen. Wir können allerdings  $\Phi_{-t}$  benutzen, um den Tangentialvektor „zurück zu bringen“.

Wir haben also

$$\mathcal{L}_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_{-t})_*(Y).$$

Analog, wenn  $\alpha \in \Gamma(T^*M)$  ein Kovektorfeld ist, definieren wir

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^*(\alpha).$$

**Definition 5.32.**  $\mathcal{L}_X$  heißt Lie-Ableitung nach  $X$ .

Interessanterweise kommt hierbei der uns schon bekannte Kommutator von Vektorfeldern heraus:

**Proposition 5.33.** *Es gilt*

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

für alle Vektorfelder  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Wir müssen zeigen:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{((\Phi_{-\varepsilon})_* Y_{\Phi_\varepsilon(m)})(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon}}_{=:(*)} = [X, Y]_m(\varphi)$$

$$(\Phi_{-\varepsilon})_* Y_{\Phi_\varepsilon(m)} = Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\Phi_{-\varepsilon}^*(\varphi)) = Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\varphi \circ \Phi_{-\varepsilon}^*)$$

Sei  $U$  Umgebung von  $m$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall, so dass der Fluss  $\Phi: I \times U \rightarrow M$  existiert. Sei  $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f = \varphi \circ \Phi - \varphi$ ,  $(t, u) \mapsto \varphi(\Phi(t, u)) - \varphi(u)$

$$\Rightarrow f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0, p) =: g(p), p \in U$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\tau, p) &:= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st, p) ds; \quad \hat{g}(0, p) = g(p) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st, p) d(\tau s) \\ &= \frac{1}{\tau} (f(\tau, p) - f(0, p)) \\ &= \frac{1}{\tau} f(\tau, p), \quad \tau \neq 0 \end{aligned}$$

Also gilt  $f(t, p) = t \cdot \hat{g}(t, p)$ ,  $\hat{g}(0, p) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, p)$ .

Dann bekommen wir  $Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\varphi \circ \Phi_{-\varepsilon}) = Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(f(-\varepsilon, \cdot) + \varphi) = Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(-\varepsilon \cdot \hat{g}(-\varepsilon, \cdot) + \varphi)$

Es folgt

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\hat{g}(-\varepsilon, \cdot)) + Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_{\Phi_\varepsilon(m)}(\hat{g}(-\varepsilon, \cdot)) \\ &= X(Y(\varphi))(m) - Y(g)(m) = X(Y(\varphi))(m) - Y(X(\varphi))(m), \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Jetzt können wir ein wichtiges geometrisches Kriterium für das Verschwinden des Kommutators zweier Vektorfelder aufstellen.

**Proposition 5.34.** Wenn  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $(\Phi_t)$ ,  $(\Psi_s)$  die Flüsse von  $X$  bzw  $Y$ , dann kommutieren  $X, Y$  genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren:

$$[X, Y] = 0 \in \Gamma(TM) \Leftrightarrow \Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$$

für alle  $s, t$ , wo beide Verknüpfungen definiert sind.

*Beweis.* Als Vorbereitung beobachten wir: wenn  $f: M \rightarrow M$  ein (lokaler) Diffeomorphismus ist, so gehört  $f \circ \Phi_t \circ f^{-1}$  zum Vektorfeld  $f_* \circ X \circ f^{-1}$ .

Nun können wir den eigentlichen Beweis durchführen.

- „ $\Leftarrow$ “: setze  $f = \Psi_s \Rightarrow (\Psi_s)_* \circ X \circ \Psi_{-s} = X$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\Psi_s)_*(X_{\Psi_{-s}(m)}) = X_m \\ &\Rightarrow \frac{(\Psi_s)_*(X_{\Psi_{-s}(m)}) - X_m}{s} = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_Y X = [X, Y] = 0 \end{aligned}$$

- „ $\Rightarrow$ “: Sei  $[X, Y] = 0$ . Wir wissen:

$$\gamma: I \rightarrow T_m M,$$

$$s \mapsto (\Psi_s)_*(x_{\Psi_{-s}(m)})$$

erfüllt  $\dot{\gamma}(0) = 0$  (Im Sinne des Differenzenquotienten). Wir wollen zeigen:  $\gamma(s) = \text{const} = X_m$ . Sei  $s$  beliebig,  $q := \Psi_s(m)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(s+h) - \gamma(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Psi_{s+h})_* X_{\Psi_{-(s+h)}(m)} - (\Psi_s)_*(X_{\Psi_{-s}(m)})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Psi_{s+h})_* \circ X \circ \Psi_{-(s+h)} - (\Psi_s)_* \circ X \circ \Psi_{-s}}{h}(m) \\ &= ((\Psi_s)_* \circ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Psi_h)_* \circ X \circ \Psi_h - X}{h} \circ \Psi_{-s})(m) \\ &= ((\Psi_s)_* \circ [Y, X] \circ \Psi_{-s})(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall m \in M : \gamma(s) = \gamma(0) = X_m \\
&\Rightarrow (\Psi_s)_* \circ X \circ \Psi_{-s} = X \\
&\Rightarrow \Psi_s \circ \Phi_t \circ \Psi_{-s} = \Psi_t
\end{aligned}$$

□

Tatsächlich ist die obige Behauptung ein Sonderfall der allgemeinen Formel, welche den (algebraischen) Kommutator von Vektorfelder mit dem gruppentheoretischen Kommutator ihrer Flüsse verbindet:

**Proposition 5.35.** *Wenn  $X, Y$  zwei Vektorfelder auf  $M$ ,  $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ,  $(\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  die entsprechenden Flüsse,  $p \in M$ , dann gilt:*

$$\dot{\gamma}(0) = 0$$

und

$$2[X, Y]_p = \ddot{\gamma}(0)$$

wobei  $\gamma(t) = (\Psi_{-t} \circ \Phi_{-t} \circ \Psi_t \circ \Phi_t)(p)$ . Noch genauer gilt:

$$[X, Y]_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Psi_{-s} \circ \Phi_{-t} \circ \Psi_s \circ \Phi_t)(p)$$

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p = 0$ . Wir analysieren die Taylorentwicklungen von  $\Phi_t$ ,  $\Psi_s$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
h(s, t) &= (\Psi_{-s} \circ \Phi_{-t} \circ \Psi_s \circ \Phi_t)(0) \\
&= \Psi_{-s}(\Phi_{-t}(\Psi_s(\Phi_t(0)))) \\
\Phi_t(0) &= t \underbrace{X_0}_{X(0)} + \frac{t^2}{2} X_0(X) + o(t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \right|_{t=0} &= X(\Phi_t(0)) \\
\left. \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= \underbrace{X_0}_{\in T_0 \mathbb{R}^n} \left( \underbrace{X}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \right) \\
X(v) &= \sum_{i=1}^n X_i(v) \frac{\partial}{\partial v_i} \\
(X_0(X))_k &= \sum_{i=1}^n X_i(0) \left. \frac{\partial X_k}{\partial v_i} \right|_{v=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_s(\Phi_t(0)) &= \Psi_s(tX_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + o(t^2)) \\
&= tX_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + o(t^2) + sY_{tX_0+o(t)} + \frac{s^2}{2}Y_{o(1)(Y)} + o(s^2 + t^2) \\
&= tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
\Phi_{-t}(\Psi_s(\Phi_t(0))) &= \Phi_{-t}(tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2)) \\
&= tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&\quad - tX_{tX_0+sY_0+o(\sqrt{s^2+t^2})} + \frac{t^2}{2}X_{o(1)(X)} + o(s^2 + t^2) \\
&= \cancel{tX_0} + sY_0 + \cancel{\frac{t^2}{2}X_0(X)} + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) - \cancel{tX_0} \\
&\quad - t(\cancel{tX_0} + sY_0)(X) + o(s^2 + t^2) + \cancel{\frac{t^2}{2}X_0(X)} \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
\Psi_{-s}(\Phi_{-t}(\Psi_s(\Phi_t(0)))) &= \Psi_{-s}(sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X))) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&\quad - sY_{sY_0+o(\sqrt{s^2+t^2})} + \frac{s^2}{2}Y_{o(1)(Y)} \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + s^2Y_0(Y) - sY_0 - s \cdot sY_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&= st(X_0(Y) - Y_0(X)) + o(s^2 + t^2) = st[X, Y]_0 + o(s^2 + t^2),
\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

## 5.5 Integralmannigfaltigkeiten und der Satz von Frobenius

Folgende Proposition liefert ein schönes geometrisches Bild von kommutierenden Vektorfeldern.

**Proposition 5.36.** *Sei  $M$  Mannigfaltigkeit,  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$  mit  $[X_i, X_j] = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . Wenn  $p \in M$ , so dass  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  linear unabhängig, dann existiert eine Karte  $(U, y)$  um  $p$  mit*

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, k$$

**Korollar 5.37** (Geradebiegen eines Vektorfeldes).  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $X(p) \neq 0 \Rightarrow \exists(U, x)$  wie oben mit  $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ .

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ , da die Aussage lokal ist. Wir betrachten jetzt auf einer hinreichend kleinen Umgebung  $W$  von  $0 \in \mathbb{R}^n$  die Abbildung

$$f: W \rightarrow \mathbb{R}^n = M, \quad a_1, \dots, a_n \mapsto (\phi_{a_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a_k}^{X_k})(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Sei  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{aligned} & \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Big|_{\in T_a \mathbb{R}^n} \right)_a (\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a (f^* \varphi) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ f)(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ \phi_{a_1+h}^{X_1} = \phi_h^{X_1} \circ \phi_{a_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a_k}^{X_k})(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ \phi_n^{X_1} \circ f)(a_1, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= X_1(\varphi)(f(a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

Wir erhalten also  $f_* \frac{\partial}{\partial x_1} = X_1 \circ f$ . Da die Flüsse kommutieren, können wir den Beweis für  $X_i$  anstelle von  $X_1$  wiederholen und bekommen  $f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i \circ f$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Außerdem

gilt für  $i > k$ :

$$f^* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Wenn also  $X_i(0) \in \text{span} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ ,  $i = 1, \dots, k$  was man durch Koordinatenwahl erreichen kann, so ist  $D_0 f$  invertierbar, also  $f$  lokal ein Diffeomorphismus,  $f^{-1} \circ y$  ist die gewünschte Karte.  $\square$

Wir wissen, dass für jedes Vektorfeld Integralkurven existieren. Wenn wir aber mehr als ein Vektorfeld haben, müssen wir eindimensionale Objekte (Kurven) ggf. durch mehrdimensionale (Untermannigfaltigkeiten) ersetzen. Es stellt sich also folgende Frage:

Seien  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$  Vektorfelder, so dass  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  an jedem Punkt  $p \in M$  linear unabhängig sind. Gibt es eine Untermannigfaltigkeit  $N \subset M$ , so dass

$$T_p N = \text{span} X_1(p), \dots, X_k(p)?$$

Wir beobachten Folgendes:

- (i) Wenn  $N$  existiert, so gilt:  $[X_i, X_j](p) \in \text{span}(X_1(p), \dots, X_k(p)) = T_p N$
- (ii) Im Allgemeinen kann man nur hoffen, dass  $N$  immersiert ist (nicht eingebettet)
- (iii) Was wichtig ist, ist  $\text{span}(X_1(p), \dots, X_k(p))$  und nicht die Vektorfelder selbst.

Diese Beobachtungen führen zu folgenden Definitionen.

**Definition 5.38.** Sei  $M$  Mannigfaltigkeit. Eine *Distribution*  $\Delta$  auf  $M$  von Dimension  $k$  ist die Zuordnung  $p \mapsto \Delta_p \subseteq T_p M$  ( $\Delta_p$  Untervektorraum von Dimension  $k$ ) glatt im folgenden Sinne ist:

$$\begin{aligned} \forall p \in M : \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } p, \text{ Vektorfeld } X \in \Gamma(TU)_p : \\ \Delta_p = \text{span}(X_1(p), \dots, X_k(p)) \end{aligned}$$

**Definition 5.39.** Eine Distribution  $\Delta$  heißt *integrierbar*, wenn für  $X_i$ 's aus der Definition von  $\Delta$  gilt:

$$\forall p \in M : \forall i, j : [X_i, X_j]_p \in \Delta_p$$



**Definition 5.40.** Eine immersierte Untermannigfaltigkeit  $N \subseteq M$  heißt *Integralmannigfaltigkeit* von  $\Delta$ , wenn

$$T_p N = \Delta_p, \quad p \in N$$

Da die Vektorfelder auf  $N$  abgeschlossen unter dem Kommutator sind, ist Integrierbarkeit eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$ . Folgendes Resultat zeigt, dass es auch hinreichend ist und beantwortet dann die oben gestellte Frage abschließend.

**Satz 5.41** (Frobenius). *Wenn  $\Delta$  eine integrierbare Distribution ist, so existiert für jedes  $p \in M$  eine eindeutig bestimmte maximale Integralmannigfaltigkeit von  $\Delta$  durch  $p$ .*

*Beweis.* Wenn  $[X_i, X_j] = 0 \Rightarrow$  alles gut! Denn wir bekommen nach der letzten Proposition Koordinaten  $x_i$  mit

$$\forall i = 1, \dots, k : X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

und da ist es trivial, eine Integralmannigfaltigkeit aufzustellen (das ist eine Hyperebene).

Wir führen jetzt den allgemeinen Fall auf diesen zurück:

Sei  $p \in M$ ,  $Y_1, \dots, Y_k$  definierendes Vektorfeld für  $\Delta$  an  $p$ , das heißt:

$$\Delta_p = \text{span}(Y_1(p), \dots, Y_k(p))$$

Wir können in  $U$  ( $U$  Umgebung von  $p$ ) Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  so wählen, dass

$$Y_i(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Sei  $\pi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $q \mapsto (x^1(q), \dots, x^k(q)) \Rightarrow$

$$\pi_*: TU \rightarrow T\mathbb{R}^k : \pi_* \left( \sum_{i=1}^n \nu^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q \right) = \sum_{i=1}^k \nu^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\pi(q)} \quad (\nu_i \in \mathbb{R})$$

$\pi_*|_{T_p U \cong T_p M}: T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R}^k$  wird zu einem Isomorphismus, wenn eingeschränkt auf  $\Delta_p$

$$\pi_*|_{\Delta_p}: \Delta_p \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R}^k, \quad Y_i(p) \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

Aus Stetigkeitsgründen ist  $\pi_*|_{\Delta_q}: \Delta_q \rightarrow T_{pi(q)}\mathbb{R}^k$  ein Isomorphismus für  $q \in W$ ,  $W$  Umgebung von  $p$ .

Definiere Vektorfelder  $X_i(q) = (\pi_*|_{\Delta_q})^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\pi(q)} \right) \in \Delta_q \forall i = 1, \dots, k$ .

Die Vektorfelder  $X_i$  spannen  $\Delta_q$  für  $q \in W$  auf. Behauptung  $[X_i, X_j] = 0$ .

$$\pi_* \left( \underbrace{[X_i, X_j]}_{\in \Delta_q \text{ (Integrabilität)}} \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{\pi(q)} = 0$$

$$\pi_*|_{\Delta_q} \text{ inj.} \Rightarrow [X_i, Y_j] = 0$$

Das Argument über Maximalität funktioniert genau wie bei dem klassischen Satz von Picard–Lindelöf über Integralkurven. □

## 6 Lineare Algebra: Tensorprodukte und äußere Potenzen

## 7 Differentialformen